Метод подстановки.

Метод подстановки заключается в интегрировании путем введения новой переменной $x=\varphi(t)$, где $x=\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируемая функция переменной t. Тогда

$\int f(x)dx=\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))+C;$

После интегрирования возвращаются к старой переменной обратной подстановкой $t=\varphi^{-1}(x)$.

Указанную формулу применяют также и в обратном направлении

$\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt=\int f(x)dx \int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt=\int f(x)dx$, где $x=\varphi(t)$. $x=\varphi(t)$.

Задачи с решением.

1. $\int\frac{dx}{1+e^x}$.

Применим подстановку $1+e^x=t$. Отсюда $x=\ln(t-1)$ и $dx=\frac{dt}{t-1}$.

Подставляя в исходный интеграл, получим:

$$I=\int\frac{dx}{1+e^x}=\int\frac{dt}{t(t-1)}=\int\frac{dt}{t-1}-\int\frac{dt}{t}=\ln|t-1|-\ln|t|+C;$$

Возвращаясь к прежней переменной x, находим окончательно:

$$I=\ln\frac{e^x}{e^x+1}=x-\ln(1+e^x)+C;$$

2. $\int\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}=\frac{1}{b^2}\int\frac{1}{\frac{a^2}{b^2}tg^2x+1}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}$; Положим $\frac{a}{b}tgx=t \Rightarrow dt=\frac{a}{b}\frac{dx}{\cos^2 x}.$

Тогда $I=\frac{1}{ab}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{ab}arctgt+C.$ Возвращаясь к исходной переменной x, получим:

$$I=\frac{1}{ab}arctg(\frac{a}{b}tgx)+C;$$

3. $\int\frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx$. Пусть $1+\sin^2 x=t$. $2\sin x\cos x=dt$ Тогда

$$I=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln(1+\sin^2 x)+C;$$

4. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}.$ Сделаем *гиперболическую* подстановку $x=asht$.

Получим:

$\int \frac{chtdt}{\sqrt{sh^2 t+1}} = \int dt = t + C;$ Вернемся к прежней переменной: $sht = \frac{x}{a} = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$.

$\Rightarrow \Rightarrow \quad e^t = \frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1} = \frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a};$

Отсюда $t = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) - \ln a.$ и $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}. = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C.$

5. $= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\cos x| + C;$ $= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\cos x| + C;$