Многочлены

1. Определения, теоремы и формулы для решения задач

Пусть $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} p_k z^{n-k} \quad = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \cdots + p_n$ – многочлен степени n, и пусть a – некоторое комплексное число.

Определение 1. Число a, $a \in \boldsymbol{C}$, называют *корнем* алгебраического многочлена $P_n(z)$, если $P_n(a) = 0$.

Теорема 1. (*теорема Гаусса*, Гаусс К. (1777-1855) – немецкий математик, астроном, физик). Всякий алгебраический многочлен степени n, $n \geq 1$, на множестве комплексных чисел имеет хотя бы один корень.

Теорема 2. Если число $a \in \boldsymbol{C}$ – корень алгебраического многочлена $P_n(z)$, то $P_n(z)$ делится на разность $z - a$ без остатка.

Теорема 3. Любой многочлен $P_n(z)$ степени $n \geq 1$ представим в виде:

$$P_n(z) = p_0(z - a_1)(z - a_2)\ldots(z - a_n),$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – корни многочлена, p_0– коэффициент при старшей степени z. Это равенство называется *разложением многочлена $P_n(z)$ на линейные множители.*

Так, для двучлена $z^2 + a^2$, где $a \in \boldsymbol{R}$, в силу теоремы 2.3 имеем разложение

$$z^2 + a^2 = (z - ai)(z + ai),$$

так как $z = \pm ai -$ корни этого двучлена.

Определение 3. Число a называется *кратным корнем* многочлена $P_n(z)$, если этот многочлен представим в виде:

$$P_n(z) = (z - a)^k Q_{n-k}(z),$$

где $Q_{n-k}(z)$ – многочлен степени $n - k$, при этом $Q_{n-k}(a) \neq 0$. Число k называют *кратностью корня*. Если кратность корня a равна единице, то число a называют *простым корнем* многочлена $P_n(z)$.

Теорема 4. Многочлен степени n имеет точно n корней с учетом их кратности.

Теорема 5 Если число $z = \alpha + i\beta$ является корнем кратности k алгебраического вещественного многочлена $P_n(z)$ с вещественными коэффициентами, то сопряженное число $\bar{z} = \alpha - i\beta$ также является корнем $P_n(z)$ той же кратности.

Теорема 6. Многочлен с вещественными коэффициентами степени n может быть разложен на произведение линейных и квадратических множителей с вещественными же коэффициентами вида

$$P_n(z) = p_0(z - x_1)^{k_1} \ldots (z - x_l)^{k_l} (z^2 + b_1 z + c_1)^{q_1} \ldots (z^2 + b_s z + c_s)^{q_s},$$

$$k_1 + \ldots + k_l + 2q_1 + \ldots + 2q_s = n.$$

Это представление вещественного многочлена называют его разложением на *неприводимые множители на множестве вещественных чисел* в том смысле, что квадратные трёхчлены в этом разложении не раскладываются на линейные множители с вещественными коэффициентами. Трёхчлены здесь– это квадратные трёхчлёны с вещественными коэффициентами и отрицательными дискриминантами; каждый из них имеет пару комплексных сопряжённых корней с ненулевыми мнимыми частями.

2. Задачи с решением

1. Многочлен $P_5(z) = z^5 + z^4 + 2z^3 + 2z^2 + z + 1$ разложить на C (множество комплексных чисел) на произведение линейных множителей.

Решение.

Как нетрудно убедиться, число $z = -1$ является корнем $P_5(z)$, поэтому $P_5(z)$ делится на разность $z - (-1) = z + 1$. Произведя деление, получим:

$$P_5(z) = (z^4 + 2z^2 + 1)(z + 1) = (z^2 + 1)^2 (z + 1).$$

Далее, $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$. Итак, приходим к равенству:

$$P_5(z) = (z + 1)\big((z - i)(z + i)\big)^2 = (z + 1)(z - i)^2 (z + i)^2.$$

2. Число $z = 1$ − простой корень вещественного многочлена $P_5(z)$ из задачи 1 , а число $z = 1 + i$ − его корень кратности 2. Написать разложение $P_5(z)$ на неприводимые множители на $\boldsymbol{R}$, если его коэффициент при старшей степени равен 1.

Решение.

В силу теоремы 4 число $z=1-i$ также является корнем данного многочлена кратности 2. Итак, все корни данного многочлена известны, поэтому для него можно написать разложение вида

$$P_5(z)=(z-1)(z-(1+i))^2(z-(1-i))^2.$$

Объединив множители, соответствующие паре сопряжённых комплексных корней, получим разложение вида :

$$P_5(z)=(z-1)(z^2-2z+2)^2.$$

Открыв скобки в правой части последнего соотношения, приходим к равенству:

$$P_5(z)=z^5-5z^4+12z^3-16z^2+12z-4.$$

3. Найти приведенный многочлен третьей степени, корни которого $\alpha_1=1, \alpha_2=-2, \alpha_3=3.$

Теорема Виета для приведенного многочлена 3-ей степени:

$f(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3 = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n)$

$a_1=-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3),$

$a_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_{3,}$

$a_3=-\alpha_1\alpha_2\alpha_3.$

Воспользуемся формулами Виета.

Получим $a_1=-2, a_2=-5, a_3=6.$ Следовательно $f(x)=x^3-2x^2-5x+6.$

3. Задачи

Найдите остаток от деления многочлена P(x) на двучлен Q(x), если:

1. $P(x)=x^3-x+1$ $Q(x)=x+3$; Ответ: -23;

2. $P(x)=2x^3-x+4$ $Q(x)=x+2$: Ответ: -10;

Найдите такие числа A и B, чтобы для всех x были справедливы равенства:

3. $x-2=A(x+2)+Bx$ Ответ: $A=-1,\quad B=2;$

4. $3-x=A(x+3)+Bx$ Ответ: $A=1,\quad B=-2;$

Найдите значение a при котором число x_0 является корнем многочлена $P(x)$, если:

5. $x_0 = -3$, $P(x) = x^3 - x - a$ $a = 24$;

6. $x_0 = -2$, $P(x) = x^3 + 2x - 2a$ Ответ: $a = -6$;

Числа x_1 и x_2 являются корнями многочлена $P(x)$. Найдите третий корень $P(x)$, если:

7. $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ $P(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2.$ Ответ: 1/3.

8. $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ $P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2.$ Ответ: 1/2.

9. Число 2 является корнем многочлена $x^3 - 4x^2 + 3x + 2.$ С помощью теоремы Виета найдите сумму квадратов двух других его корней. Ответ: 6.

10. Найдите сумму действительных корней многочлена $3x^3 + x^2 + x + 3.$ Ответ: -1.

11. Найдите сумму *различных* действительных корней многочлена $P(x) = x^3 - 12x - 16.$ Ответ: 2.

12. Найдите наименьшее положительное решение уравнения $x^4 = (2x-1)^2.$ Ответ: $\sqrt{2} - 1.$

13. Уравнение $3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2 = 0$ имеет корень $x = 1 - i.$ Найдите остальные его корни. Ответ: $1 - i;$ $\frac{1}{6}(-1 \pm \sqrt{13}).$

Данные многочлены разложить на множители:

14. $P(x) = x^4 + 1$ Ответ: $(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).$

15. $P(x) = x^6 - 1.$ Ответ: $(x+1)(x-1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$

16. $P(x) = x^6 + 1.$ Ответ: $(x^2 + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1).$

4. Теоретические вопросы.

1. Сформулируйте основную теорему алгебры (теорема Гаусса).
2. Сформулируйте теорему Безу и её следствие.

3. Сформулируйте теорему о комплексно-сопряженных корнях многочлена с вещественными коэффициентми.

4. Запишите разложение многочлена $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n$ с корнями $z_1, ..., z_n$ на линейные множители.

5. Дайте определение корня многочлена $P(z)$ кратности k.

6. Запишите необходимые и достаточные условия k-кратности корня z_0 многочлена $P(z)$.

7. Пусть x_0 - корень многочлена $P(x)$ кратности k. Чему равно $P^{(k-1)}(x_0)$?

8. Запишите разложение многочлена $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ с вещественными коэффициентами на произведение линейных и квадратичных множителей с вещественными коэффициентами. Как связана сумма степеней этих множителей со степенью многочлена?

9. Какое максимальное количество комплексных корней может иметь многочлен третьей степени с вещественными коэффициентами?

10. Если многочлен тождественно равен нулю, то чему равны его коэффициенты?

11. Если два многочлена $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ и $b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n$ тождественно равны, то как связаны их коэффициенты?

12. Почему многочлен с вещественными коэффициентами имеет четное число комплексных корней?