

Неопределенный интеграл

Определения, свойства, основные формулы

Определение 1.

Функция $F(x)$ называется *первообразной* от $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если для всех точек этого промежутка выполняется равенство

$$F'(x) = f(x)$$

Понятно, что прибавление постоянной величины к правой части равенства не изменяет величины производной. Совокупность всех первообразных от функции $f(x)$ называют *неопределенным интегралом* и обозначают символом $\int f(x)dx$, где $f(x)$ – *подынтегральная функция*, а $f(x)dx$ – *подынтегральное выражение*.

Другими словами, по определению:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Из определения интеграла следуют следующие его свойства:

$$1^{\circ}. \left(\int f(x)dx \right)' = (F(x) + C)' = f(x).$$

$$2^{\circ}. d\left(\int f(x)dx \right) = f(x)dx.$$

$$3^{\circ}. \int dF(x) = F(x) + C.$$

$$4^{\circ}. \int F'(x)dx = F(x) + C. \int F'(x)dx = F(x) + C.$$

Линейные свойства неопределенного интеграла:

$$1. \int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

$$2. \int af(x)dx = a \int f(x)dx.$$

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то:

$$3. \int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$$

$$4. \int f(x+b)dx = F(x+b) + C$$

$$5. \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C. \quad (a \neq 0)$$

В дальнейшем очень важную роль играет свойство *инвариантности* неопределенного интеграла по отношению к переменной интегрирования, а именно:

$$\text{Если } F(x) = \int f(x)dx, \quad F'(x) = f(x) \quad \text{то} \quad F(u) = \int f(u)du,$$

где $u = \varphi(x)$ – любая дифференцируемая функция от x .

Это обстоятельство позволяет нам привести таблицу **основных** неопределенных интегралов в расширенном виде. Существует обширное количество таблиц неопределенных интегралов, которые удаётся в конечном итоге свести к данным. Знание **этой** таблицы (за исключением номеров 18 – 20) является **обязательным**. Большинство формул – очевидны из таблицы производных и могут быть легко проверены по определению.

Обоснование менее очевидных результатов будет рассмотрено в рассмотренных далее примерах.

Таблица простейших неопределенных интегралов.

$$1. \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$$

$$2. \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C;$$

$$3. \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C; \quad (a \neq 0);$$

$$4. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C; \quad (a \neq 0);$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C; \quad (a \neq 0);$$

$$5. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm A}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm A} \right| + C;$$

$$6. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C;$$

$$7. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C; \quad (a > 0);$$

$$\int e^u du = e^u + C;$$

$$8. \int \sin u du = -\cos u + C;$$

$$9. \int \cos u du = \sin u + C;$$

$$10. \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tgu} + C;$$

$$11. \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctgu} + C;$$

$$12. \int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C;$$

$$13. \int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C;$$

$$14. \int shudu = chu + C;$$

$$15. \int chudu = shu + C;$$

$$16. \int \frac{du}{ch^2 u} = thu + C;$$

$$17. \int \frac{du}{sh^2 u} = -cthu + C;$$

$$18. \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + \frac{u}{u^2 + a^2} \right) + C;$$