

## Непосредственное интегрирование

**Непосредственное интегрирование** заключается в прямом использовании таблицы интегралов и свойств интегралов.

### Задачи с решением.

$$1. \int 5^x e^x dx = \int (5e)^x dx = \frac{(5e)^x}{\ln 5 + 1} + C;$$

Здесь непосредственно применена формула таблицы интегралов.

$$2. \int (\sin 3x - \sin 3\alpha) dx = \frac{1}{3} \int \sin 3x d3x - \sin 3\alpha \int dx = -\frac{1}{3} \cos 3x - x \sin 3\alpha + C;$$

Здесь применено свойство линейности, так как вынесен множитель из под знака интеграла, и свойство инвариантности интеграла, так как, можно положить  $u = 3x$  и применить табличный интеграл  $\int \sin u du = -\cos u + C$ .

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)^2}} = \arcsin \frac{x}{2\sqrt{2}} + C;$$

Здесь применены те же свойства, что и в примере 2.

$$4. \int \sqrt{2px} dx = \sqrt{2p} \int x^{\frac{1}{2}} dx = \sqrt{2p} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2x}{3} \sqrt{2px} + C;$$

Здесь применены те же свойства, что и в примере 2.

Рассмотрим более подробно частные приемы непосредственного интегрирования: разложением и введением множителя под дифференциал.

**1. Интегрирование разложением** - это разложение подынтегральной функции на сумму легко интегрируемых слагаемых.

$$1. \int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int (x^4 - x^2 - 2)x^{\frac{2}{3}} dx = \int (x^{\frac{10}{3}} - x^{\frac{4}{3}} - 2x^{\frac{2}{3}}) dx =$$

$$2. \int tg^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = tg x - x + C;$$

$$3. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \int \frac{dx}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a} \int \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx = \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x+a} = \\ = \frac{1}{2a} \ln|x-a| - \frac{1}{2a} \ln|x+a| = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

$$4. \int \frac{x^4}{1+x^2} dx = \int (x^2 - 1) dx + \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x + C.$$

$$5. \int \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx = \int \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2}}{\sqrt{(2-x^2)(2+x^2)}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} - \int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} =$$

$$= \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} - \ln(x + \sqrt{4+x^2}) + C;$$

## 2. Интегрирование подведением множителя под знак дифференциала.

### Основные формулы для решения задач.

При использовании формул *основной таблицы* интегралов необходимо иметь в виду простейшие преобразования дифференциала:

$$1. du = d(u+b) \quad (b = \text{const})$$

$$2. du = \frac{1}{a} d(au) \quad du = \frac{1}{a} d(au) \quad (a \neq 0)$$

$$3. du = \frac{1}{a} d(au+b) \quad du = \frac{1}{a} d(au+b) \quad (a \neq 0)$$

Далее, перепишем таблицу дифференциалов в обратном порядке:

$$u^n du = \frac{1}{n+1} du^{n+1} \quad \cos u du = d \sin u$$

$$\frac{1}{\cos^2 u} du = dtgu$$

$$\frac{1}{u} du = d \ln |u|$$

$$\frac{1}{\sin^2 u} du = -dctgu$$

$$\frac{1}{\sqrt{u^2 \pm A}} du = d \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm A} \right|$$

$$shu du = dchu$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = d \arcsin \frac{u}{a}$$

$$ch u du = dshu$$

$$\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} = \frac{du}{u^2 + a^2}$$

$$\frac{1}{ch^2 u} = dthu$$

$$a^u du = \frac{1}{\ln a} da^u$$

$$\frac{1}{sh^2 u} du = -dcthx$$

$$\cos u du = d \sin u$$

$$\sin u du = -d \cos u$$

### Образцы задач с решениями

$$1. \int \frac{\sqrt{x} + \ln x}{x} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int \ln x \frac{dx}{x} = 2 \int d\sqrt{x} + \int \ln x d \ln x = 2\sqrt{x} + \frac{1}{2} \ln^2 x + C;$$

$$2. \int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx = \int \sqrt{\arcsin x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \sqrt{\arcsin x} d \arcsin x = \\ = \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{\arcsin^3 x} + C;$$

$$3. \int x 7^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 7^{x^2} dx^2 = \frac{1}{2} \frac{7^{x^2}}{\ln 7} + C.$$

$$4. \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2) \ln(x+\sqrt{1+x^2})}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \frac{1}{\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}} = \int \frac{d \ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}} = \int u^{-\frac{1}{2}} du = \\ = 2u^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} + C.$$

$$5. \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d \cos x}{\cos x} = - \ln |\cos x| + C.$$

$$6. \int \frac{x dx}{\cos^2 x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{\cos^2 x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \cos x^2 + C.$$

$$7. \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x} + x \ln(1+x^2) + 1}{1+x^2} dx = \int e^{\operatorname{arctg} x} \frac{dx}{1+x^2} + \frac{1}{2} \int \ln(1+x^2) d(1+x^2) + \int \frac{dx}{1+x^2} = \\ = e^{\operatorname{arctg} x} + \frac{1}{4} \ln^2(1+x^2) + \operatorname{arctg} x + C. = e^{\operatorname{arctg} x} + \frac{1}{4} \ln^2(1+x^2) + \operatorname{arctg} x + C.$$

$$8. \int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \arcsin x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \int \arcsin x d \arcsin x - \int d\sqrt{1-x^2} = \\ = \frac{1}{2} \arcsin^2 x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$9. \int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} dx = \int \sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} d \ln(x+\sqrt{1+x^2}) = \\ = \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{3} \ln^{\frac{3}{2}}(x+\sqrt{x^2+1}) + C.$$

$$10. \int \frac{dx}{\sin ax \cos ax} = \frac{1}{2a} \int \frac{d2ax}{\sin 2ax} = \frac{1}{2a} \ln |\operatorname{tg} ax| + C.$$

## Задачи

Найдите следующие интегралы:

$$1. \int \frac{dx}{x(1+\ln x)} \quad \text{Ответ: } \ln |1+\ln x| + C$$

$$2. \int (1+\ln x)^2 \frac{dx}{x} \quad \text{Ответ: } C + (1+\ln x)^3 / 3$$

3.  $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$       Ответ:  $-1/\ln x + C$
4.  $\int x\sqrt{1+x^2} dx$       Ответ:  $\frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + C$
5.  $\int \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}} dx$       Ответ:  $\frac{1}{2}\sqrt{1+2x^2} + C$
6.  $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx$       Ответ:  $\frac{2}{3}\sqrt{1+x^3} + C$
7.  $\int xe^{-x^2} dx$       Ответ:  $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$
8.  $\int x^2 e^{-2x^3} dx$       Ответ:  $-\frac{1}{6}e^{-2x^3} + C$
9.  $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 4}$       Ответ:  $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{e^x - 2}{e^x + 2} \right| + C$
10.  $\int \sin 2x \cos^3 x dx$       Ответ:  $-\frac{2}{5} \cos^5 x + C$
11.  $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x} dx$       Ответ:  $1/\cos^2 x + C$
12.  $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{4 + \sin^2 x}}$       Ответ:  $\ln(\sin x + \sqrt{4 + \sin^2 x}) + C$
13.  $\int \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \cos 2x} dx$       Ответ:  $\frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 x + C$
14.  $\int \frac{\cos x dx}{\sin^5 x}$       Ответ:  $-\frac{1}{4 \sin^4 x} + C$
15.  $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\sin^2 x} dx$       Ответ:  $-\frac{1}{4} \operatorname{ctg}^4 x + C$
20.  $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$       Ответ:  $\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$

**Указания для решения следующих примеров.**

В следующих примерах интегрирования для упрощения проверки результатов вычислений предлагается привести численный ответ, который получается следующим образом. Как обычно находится первообразная функция  $F(x)$ ; ей сопоставляется число по формуле

**Ньютона-Лейбница**

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

Под значением  $F(\infty)$  понимается  $\lim_{A \rightarrow \infty} F(A)$ .

**Образцы задач с решением.**

Вычислить

$$1. \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^5 x dx.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^5 x dx &= - \int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin^2 x d \cos x = - \int_0^{\pi/2} \cos^5 x (1 - \cos^2 x) d \cos x = \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^7 x d \cos x - \int_0^{\pi/2} \cos^5 x d \cos x = \frac{\cos^8 x}{8} \Big|_0^{\pi/2} - \frac{\cos^6 x}{6} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

$$2. \text{ Вычислить } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx &= \int_1^{+\infty} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x+1} dx = \\ &= (\ln x - \ln(x+1)) \Big|_1^{+\infty} = \ln \frac{x}{x+1} \Big|_1^{+\infty} = 0 - \ln \frac{1}{2} = \ln 2. \end{aligned}$$

### **Задачи**

$$21. \int_1^e \frac{dx}{x(1+2 \ln x)} \quad \text{ОТВЕТ: } \frac{1}{2} \ln 3$$

$$22. \int_0^1 x \sqrt{1+x^2} dx \quad \text{ОТВЕТ: } \frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1)$$

$$23. \int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} \quad \text{ОТВЕТ: } \operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}$$

$$24. \int_0^1 \frac{x(1-x^2)}{1+x^4} dx \quad \text{ОТВЕТ: } \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2$$

$$25. \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^3}} \quad \text{ОТВЕТ: } 4/3$$

$$26. \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^5} \quad \text{ОТВЕТ: } 1/8$$