Несобственные интегралы

1.Определения, теоремы и формулы для решения задач.

Интегралы с бесконечными пределами и интегралы от неограниченных функций называются *несобствнными* интегралами I и II рода соответственно.

Несобственные интегралы I рода.

Определение 1.

$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\left[F(b)-F(a)\right] = F(+\infty)-F(a)$ - несобственный интеграл I рода.

Теорема 1.

Если при $x \ge a$ выполняются неравенства $0 \le \varphi(x) \le f(x)$ и интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_a^{\infty}\varphi(x)dx$ тоже сходится и $\int\limits_a^{\infty}\varphi(x)dx \le \int\limits_a^{\infty} f(x)dx$. Наоборот, из расходимости второго интеграла следует расходимость первого.

Теорема 2. Если в промежутке $(a,+\infty)$ функция $f(x)$ меняет знак и $\int\limits_a^{\infty}|f(x)|dx$ сходится, то $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ - также сходится (*абсолютно*), причем $\left|\int\limits_a^{\infty} f(x)dx\right| \le \int\limits_a^{\infty}|f(x)|dx$.

Замечание. Расходимость $\int\limits_a^{\infty}|f(x)|dx$ сама по себе не влечет расходимости исходного интеграла. Если будет доказана его сходимость, то говорят, что он сходится *условно.*

Теорема 3. Если при $x\to\infty$ бесконечно малая $f(x)\sim\frac{A}{x^{\lambda}}$, то при $\lambda>1$ интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ сходится, а при $\lambda\le1$ - расходится.

Несобственные интегралы II рода.

Определение 1.

Если функция $f(x)$ не ограничена в любой окрестности точки c отрезка $[a,b]$. и непрерывна вне него, то по определению полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\eta\to 0}\int_{c+\eta}^{b} f(x)dx .$$

Если пределы существуют только при $\varepsilon = \eta$,то говорят о сходимости интеграла в смысле *главного значения* и он обозначается как V.p.$\int_a^b f(x)dx$.

Все свойства этих интегралов аналогичны рассмотренным выше, за **исключением** последнего, а именно:

Теорема 1. Если $f(x)\ge 0$ и при $x\to c$ $f(x) \sim \frac{A}{(x-a)^2}$, то при $m<1$ интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, а при $m\ge 1$ - расходится**.**

2. Задачи с решением.

1.Исследовать сходится ли несобственный интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^8}}$

Решение. Очевидно, что $\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \sim \frac{1}{2}(\frac{1}{1-x})^{\frac{1}{2}}$ при $x\to\infty$ $f(x) \sim \frac{1}{x^4}$.Здесь

$\lambda = 4 > 1,$

следовательно интеграл сходится.

2. Исследовать сходится ли несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Решение.

Это несобственный интеграл II рода. Поскольку

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}} = \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}}$$

Следовательно, при $x\to 1$ будем иметь $\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \sim \frac{1}{2}(\frac{1}{1-x})^{\frac{1}{2}}$. Здесь $\lambda = \frac{1}{2} < 1$

поэтому интеграл сходится.

3. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim_{B\to-\infty}\int_B^0 \frac{dx}{x^2+2x+5} + \lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{dx}{x^2+2x+5}$

Вычислим каждый из пределов, стоящих в правой части равенства:

$$\lim_{B\to-\infty}\int_B^0 \frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim_{B\to-\infty}\frac{1}{2}arctg\,\frac{x+1}{2}\Big|_B^0 = \frac{1}{2}arctg\,\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{dx}{x^2+2x+5}=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2}arctg\,\frac{x+1}{2}\Big|_0^A=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}arctg\,\frac{1}{2},$$

следовательно

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}=\frac{\pi}{2}.$$

4. $\displaystyle\int_{e^2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}=\lim_{A\to\infty}\int_{e^2}^{A}\frac{dx}{x\ln^3 x}=\lim_{A\to\infty}(-\frac{1}{2\ln^2 x}\Big|_{e^2}^{A})=\lim_{A\to\infty}(\frac{1}{8}-\frac{1}{2\ln^2 A})=\frac{1}{8}.$

5. $\displaystyle\int_0^{\infty}x\sin xdx=\lim_{A\to\infty}\int_0^A x\sin xdx=\lim_{A\to\infty}(-x\cos x\Big|_0^A+\int_0^A\cos xdx)=\lim_{A\to\infty}(-A\cos A+\sin A).$

Однако последний предел не существует. Следовательно $\displaystyle\int_0^{\infty}x\sin xdx$ расходится.

3. Задачи

Применяя признак сравнения, исследуйте, при каких значениях λ. следующие интегралы сходятся.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^\lambda dx}{x^3+1}$ Ответ: $\lambda<2$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^\lambda dx}{x^2+x+1}$: Ответ $\lambda<1$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda\left(\sqrt{x}+1\right)}$ Ответ: $\lambda>\frac{1}{2}$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^\lambda}$ Ответ: $\lambda>1$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^\lambda}$ Ответ: $\lambda>\frac{1}{2}$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^3+1)^\lambda}$ Ответ: $\lambda>\frac{1}{3}$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^\lambda dx}{\sqrt{x+1}}$ Ответ: $\lambda<-\frac{1}{2}$
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda\sqrt{x^2+1}}$ Ответ: $\lambda>0$
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^\lambda dx}{x^3+x+1}$ Ответ: $\lambda<2$

10. $\int_0^{+\infty} \frac{x^\lambda dx}{\sqrt{x^3+1}}$ Ответ: $\lambda < \frac{1}{2}$

11. $\int_0^{+\infty} \frac{x^\lambda dx}{\sqrt{x^4+x+1}}$ Ответ: $\lambda < 1$

12. $\int_0^{+\infty} \frac{x^\lambda dx}{\sqrt{x^6+x+1}}$ Ответ: $\lambda < 2$

13. $\int_0^{+\infty} \frac{x^\lambda dx}{\sqrt{x}+1}$ Ответ: $\lambda < -\frac{1}{2}$

14. $\int_0^{+\infty} \frac{x^\lambda dx}{x+1}$ Ответ: $\lambda < 0$

15. $\int_0^{+\infty} \frac{x^\lambda dx}{(x+1)^2}$ Ответ: $\lambda < 1$

4.Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение несобственного интеграла 1-го рода с бесконечным верхним пределом от непрерывной функции.

2. Сформулируйте определение несобственного интеграла 1-го рода с бесконечным нижним пределом от непрерывной функции.

3. Сформулируйте определение несобственного интеграла 1-го рода с бесконечным нижним пределом от непрерывной функции.

4. Сформулируйте определение несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ второго рода, когда в промежутке $[a,b)$ функция $f(x)$ непрерывна и $f(x)\xrightarrow[x\to b-0]{}\infty$ (b-особая точка).

5. Сформулируйте определение несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ 2-го рода от функции $f(x)$, непрерывной в промежутке $[a,b]$ за исключением точки c $(0<c<b)$, такой, что $f(x)\xrightarrow[x\to c]{}\infty$ (с- особая точка).

6. Сформулируйте предельный признак сравнения на примере интегралов 1-го рода с бесконечным верхним пределом от положительных функций

7. 62. Какой несобственный интеграл называется абсолютно сходящимся?

8. Укажите, для каких значений параметра p интеграл $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}\left(a>0\right)$ является сходящимся, а для каких значений – расходящимся
9. Укажите, для каких значений параметра p интеграл $\int\limits_a^{b}\frac{dx}{(b-x)^p}$ является сходящимся, а для каких значений – расходящимся
10. Укажите, для каких значений параметра p интеграл $\int\limits_a^{b}\frac{dx}{(x-a)^p}$ является сходящимся, а для каких значений – расходящимся.
11. Какой несобственный интеграл называется неабсолютно сходящимся? (На примере несобственного интеграла 1-го рода с бесконечным верхним пределом).
12. Запишите формулы, выражающие свойство линейности для несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом.
13. Сформулируйте признак сравнения в конечной форме на примере несобственных интегралов 1-го рода с бесконечным верхним пределом.