# Определенный интеграл

## 1. Основные формулы и теоремы.

*Вычисление определенного интеграла по формуле* ***Ньютона-Лейбница***

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a); \qquad (1)$$

где *F(x)* - одна из первообразных для *f(x)*, т.е.

$$F'(x) = f(x) \quad (a \le x \le b) \qquad (2)$$

**Замечание:** Эту формулу можно применять только, когда равенство (2) выполняется на всем отрезке $[a,b]$, в частности первообразная функция должна быть непрерывной на всем этом отрезке. Использование в качестве первообразной разрывной функции может привести к неверному результату.

*Оценки интеграла.*

1. Если $f(x) \le \varphi(x)$ при $a \le x \le b$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx,$$

2. $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

3. $$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

где $m$ и $M$ - соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на $[a,b]$.

4. Теорема о *среднем значении*:

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$., то

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \qquad a < \xi < b$$

Число $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ называется *средним* значением функции на $[a,b]$.

5. $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

6. *Замена переменной в определенном интеграле.*

Если функция $x=\varphi(t)$ удовлетворяет условиям:

1) $\varphi(t)$ - непрерывная однозначная функция, заданная на промежутке $[a,b]$. и имеющая на нем непрерывную производную $\varphi^{/}(t)$;

2) Значения $x=\varphi(t)$ на отрезке $[\alpha,\beta]$, не выходят за пределы отрезка $[a,b]$.

3) $\varphi(\alpha)=a$ и $\varphi(\beta)=b$

то для $\forall$ непрерывной на $[a,b]$. функции $f(x)$ имеет место формула *замены переменной* :

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi^{/}(t)dt$$

7. Упрощение интегралов, основанное на свойстве симметрии подынтегральной функции:

1. Если $f(x)$ - четная на отрезке $[-a,a]$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$$

2. Если $f(x)$ - нечетная на отрезке $[-a,a]$, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$

3. Если $f(x)$ - периодическая функция с периодом $T$, то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{a+nT}^{b+nT} f(x)dx \qquad n\in N$$

8. Интегрирование по частям в определенном интеграле:

Если $u(x)$ и $v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции, то

$$\int_a^b u(x)v^{/}(x)dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u^{/}(x)dx$$

или короче:

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

**2.Задачи с решением.**

Вычислить определенный интеграл:

1. $\int\limits_1^4 x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = 21.$

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$

3. $\int\limits_0^5 x\sqrt{x+4}dx$ .

*Решение.*

Введем новую переменную интегрирования $\sqrt{x+4} = t$, откуда $x = t^2 - 4$ и $dx = 2tdt$. Находя новые пределы интегрирования, получим:

$$\int\limits_0^5 x\sqrt{x+4}dx = \int\limits_2^3 (t^2-4)t2tdt = \int\limits_2^3 (2t^4 - 8t^2)dt = 2\left.\frac{t^5}{5}\right|_2^3 - 8\left.\frac{t^3}{3}\right|_2^3 = \frac{2}{5}(3^5 - 2^5) - \frac{8}{3}(3^3 - 2^3) = 33\frac{11}{15}.$$

4. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \int\limits_0^2 \frac{2tdt}{t+1} = 2\int\limits_0^2 \frac{(t+1)-1}{t+1} = 2\int\limits_0^2 dt - 2\int\limits_0^2 \frac{d(t+1)}{t+1} = 2t\Big|_0^2 - 2\ln|t+1|\Big|_0^2 = 4 - 2\ln 3 = 1{,}803.$

5. $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$ .

*Решение.*

Положим $x = a\sin t;\ dx = a\cos tdt;$ Новые пределы: $\alpha = 0; \beta = \frac{\pi}{2}$. Получим:

$$\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\,a\cos tdt = a^4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 tdt = a^4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2tdt =$$

$$= \frac{a^4}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t)dt = \frac{\pi a^4}{16}.$$

6. $\int\limits_0^{2\pi} x\sin\frac{x}{2}dx = --2\int\limits_0^{2\pi} xd\cos\frac{x}{2} = -2x\cos\left.\frac{x}{2}\right|_0^{2\pi} + 2\int\limits_0^{2\pi}\cos\frac{x}{2}dx = 4\pi$ .

7. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\sin tdt = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t^2d\cos t = -t^2\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\cos tdt = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} td\sin t =$

$$= 2t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin tdt = \pi - 2.$$

8. Оценить интеграл $\int\limits_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}\sin^2 t}}dt$ .

*Решение.*

Поскольку подинтегральная функция $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + {}^9\!/_{16}\sin^2 t}}$ в данном промежутке $[o,\pi]$ имеет наименьшее значение $m=\frac{4}{5}$ и наибольшее $M=1$, то в соответствии с формулой $m(b-a)\le\int\limits_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

Получаем

$$\frac{4}{5}\pi\le\int\limits_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}\sin^2 t}}dt\le\pi\ .$$

9. Вычислить интеграл $\int\limits_{-7}^{7}\frac{x^4\sin x}{x^6+2}dx$.

*Решение.*

Так как подынтегральная функция нечетна, то сразу заключаем, что интеграл равен нулю.

## 3. **Задачи**

Вычислить следующие определенные интегралы:

1. $\int\limits_0^4\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$ Ответ: $2\ln 3$

2. $\int\limits_2^5\frac{1+x}{\sqrt{x-1}}dx$ Ответ: 26/3

3. $\int\limits_0^3\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$ Ответ: 2+2ln2 – 2ln3

4. $\int\limits_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ Ответ: 4-2ln3

5. $\int\limits_0^1\frac{dx}{\left(x-2\sqrt{x}+2\right)\sqrt{x}}$ Ответ: $\pi/2$

6. $\int\limits_1^8\frac{dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$ Ответ: 3(ln4-ln3)

7. $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+2\cos x}$ Ответ: $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

8. $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$ Ответ: $\ln 2$

9 . $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1+\cos x)^2}$ Ответ: 2/3

10. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+2\cos^2 x}$ Ответ: $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

11. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ Ответ: $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

12. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$ Ответ: 0,5

13. $\int\limits_1^{2} \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$ Ответ: $\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$

**4.Теоретические вопросы**

1. Запишите формулу, определяющую определенный интеграл как предел интегральной суммы. Объясните смысл величин, входящих в формулу.
2. Запишите интегральную сумму, составленную для функции $f(x)$ на промежутке $[a;b]$. Объясните смысл величин, входящих в формулу
3. Какой геометрический смысл имеет интегральная сумма для интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, где $f(x)$-непрерывная неотрицательная функция?
4. Какой геометрический смысл имеет определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, где $f(x)$- непрерывная неотрицательная функция?
5. Сформулируйте достаточные условия интегрируемости функции $f(x)$ на конечном промежутке $[a,b]$.
6. Если функция имеет на конечном промежутке одну точку разрыва, то какому ещё свойству она должна удовлетворять, чтобы быть интегрируемой на этой промежутке?
7. Какая функция называется интегрируемой на промежутке $[a,b]$?
8. Чему равен $\int\limits_a^b F'(x)\,dx$?
9. Чему равен $\int\limits_a^b dF(x)$?
10. Почему любая дифференцируемая на $[a;b]$ функция является интегрируемой на $[a;b]$?

11. Выразите с помощью определенного интеграла путь, пройденный материальной точкой. Объясните смысл подынтегральной функции и пределов интегрирования.
12. Как выразить с помощью определенного интеграла работу переменной силы? Объясните смысл величин, входящих в формулу.
13. Как выразить массу стержня с помощью определенного интеграла? Объясните смысл величин, входящих в формулу.
14. Приведите пример интегрируемой функции на промежутке $[a,b]$, для которой неопределенный интеграл является неберущимся
15. Сформулируйте необходимое условие интегрируемости функции на промежутке $[a,b]$.
16. Является ли интегрируемой на отрезке $[0;2]$ функция, заданная формулами $f(x)=1;\ 0\le x\le 1; f(x)=2; 1\le x\le 2$? Если-да, то чему равен интеграл от этой функции по отрезку $[0;2]$?
17. Чему равен определенный интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку$[-a;a]$?
18. Как связан определенный интеграл от четной функции $f(x)$ по симметричному промежутку$[-a;a]$с интегралом от этой же функции по промежутку $[0;a]$?
19. Пусть $f(x)$- непрерывная периодическая функция с периодом T. Напишите формулу, связывающую интегралы от этой функции по промежуткам $[0;T]$ и $[a;a+T]$.
20. Почему любая элементарная функция $f(x)$ является интегрируемой на промежутке $[a;b]$, входящем в область определения этой функции?
21. Чему равен определенный интеграл в равных пределах? Выразите это свойство формулой
22. Если пределы интегрирования поменять местами, то как изменится величина интеграла? Выразите это свойство формулой.
23. Сформулируйте свойство линейности определенного интеграла.
24. Запишите в виде формулы свойство определенного интеграла от суммы функций.
25. Запишите в виде формулы свойство определенного интеграла от функции, умноженной на постоянный множитель.
26. Сформулируйте свойство, связывающее знаки функции и определенного интеграла на промежутке $[a,b]$.

27. Сформулируйте свойство об интегрировании неравенства между функциями на промежутке $[a,b]$.

28. Если функция на промежутке $[a,b]$ удовлетворяет неравенствам $m \le f(x) \le M$, то каким неравенствам удовлетворяет неопределенный интеграл от $f(x)$ по этому промежутку?

29. Сформулируйте свойство об оценке модуля определенного интеграла.

30. Сформулируйте теорему о среднем для определенного интеграла от интегрируемой функции.

31, Сформулируйте теорему о среднем для определенного интеграла от непрерывной функции.

32. Сформулируйте теорему Барроу для интеграла с переменным верхним пределом.

33. Запишите формулу Ньютона – Лейбница.

34. Запишите формулу интегрирования по частям для определенного интеграла.

35. Приведите геометрическую интерпретацию теоремы о среднем для определенного интеграла

36. Приведите геометрическую интерпретацию теоремы о среднем для определенного интеграла

37. Что такое среднее (интегральное) значение функции $f(x)$ на промежутке $[a;b]$?

38. Чему равна производная интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной подынтегральной функции?

39. Запишите формулу, определяющую замену переменной $x=\varphi(t)$ в определенном интеграле $\int\limits_a^b f(x)dx.$

40. В определенном интеграле $\int\limits_a^b f(x)dx.$ выполняется подстановка $x=\varphi(t)$.

Сформулируйте требования, которым должна удовлетворять функция $\varphi(t)$, чтобы такая подстановка была возможна. В какой интеграл преобразуется данный интеграл?.