Алгебраические рациональные дроби

1. Основные определения и формулы для решения задач

Определение 1. Отношение $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ алгебраических многочленов $Q_m(x)$ и $P_n(x)$ степени m и n называют *рациональной функцией*.

Если степень знаменателя $n \geq 1$, то рациональную функцию называют *рациональной алгебраической дробью*, или, короче, *рациональной дробью*. В противном случае, т.е. при $n = 0$, рациональная функция представляет собой многочлен (ибо $P_0(x) \equiv p_0$, где $p_0 \in \boldsymbol{R}$).

Рациональную дробь $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ называют *правильной*, если $m < n$, и *неправильной* в противном случае, т. е. при $m \geq n$. Неправильную рациональную дробь $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, поделив "уголком" многочлен $Q_m(x)$ на многочлен $P_n(x)$ (в общем случае с остатком), можно представить в виде суммы алгебраического многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = T_{m-n}(x) + \frac{S_l(x)}{P_n(x)}.$$

Определение 2 .*Элементарными* (*простейшими*) рациональными дробями называют рациональные дроби следующих четырех видов:

$$\frac{A}{x-a},\ \frac{A}{(x-a)^k},\ \frac{Bx+C}{x^2+bx+c},\ \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k},$$

где $A,\ B,\ C,\ a,\ b,\ c$ – вещественные числа, причем $b^2/4 - c < 0$, так что трёхчлен x^2+bx+c имеет мнимые корни; k – натуральное число, $k \geq 2$

Теорема Пусть $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ – правильная рациональная дробь, $m < n$, $Q_m(x)$ и $P_n(x)$ − вещественные многочлены. Если $P_n(x)$ представлен разложением:

$$P_n(z) = p_0(x-x_1)^{k_1}\ldots(x-x_l)^{k_l}(x^2+b_1x+c_1)^{q_1}\ldots(x^2+b_sx+c_s)^{q_s}, \qquad (1)$$

где $k_1+\ldots+k_l+2q_1+\ldots+2q_s = n$, а трёхчлены не имеют вещественных корней, то справедливо равенство: $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \dfrac{A_{11}}{x-x_1} + \dfrac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \ldots + \dfrac{A_{1k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} +$

$$+\frac{A_{21}}{x-x_2} + \frac{A_{22}}{(x-x_2)^2} + \ldots + \frac{A_{2k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} + \ldots + \frac{A_{l1}}{x-x_l} + \frac{A_{l2}}{(x-x_l)^2} + \ldots + \frac{A_{lk_l}}{(x-x_l)^{k_l}} +$$

$$+\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+b_1x+c_1}+\frac{B_{12}x+C_{12}}{(x^2+b_1x+c_1)^2}+\ldots+\frac{B_{1q_1}x+C_{1q_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{q_1}}+$$

$$+\frac{B_{21}x+C_{21}}{x^2+b_2x+c_2}+\frac{B_{22}x+C_{22}}{(x^2+b_2x+c_2)^2}+\ldots+\frac{B_{2q_2}x+C_{2q_2}}{(x^2+b_2x+c_2)^{q_2}}+\ldots+$$

$$+\frac{B_{s1}x+C_{s1}}{x^2+b_sx+c_s}+\frac{B_{s2}x+C_{s2}}{(x^2+b_sx+c_s)^2}+\ldots+\frac{B_{sq_s}x+C_{sq_s}}{(x^2+b_sx+c_s)^{q_s}}. \qquad (2)$$

Здесь каждому вещественному корню знаменателя $P_n(x)$ дроби соответствует строка (сумма) простейших дробей первого и второго вида с количеством слагаемых, равным кратности этого корня; каждой паре комплексно-сопряженных корней $P_n(x)$, т. е. каждому квадратному множителю в формуле (1), соответствует строка (сумма) простейших дробей третьего и четвертого вида с количеством слагаемых, равным кратности этих корней.

Коэффициенты формулы (2) на практике определяются *методом сравнения коэффициентов*.

2. Задачи с решениями

1. Получить разложение на элементарные дроби для дроби $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)^2}$.

Решение.

Согласно формуле (2) имеем

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2},$$

где A, B, C, D, E – константы, значения которых предстоит найти. Приведём дроби в правой части этого соотношения к общему знаменателю:

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)^2}=\frac{A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x+1)(x^2+1)+(Dx+E)(x+1)}{P_5(x)}$$

Или $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)^2}=$

$$=\frac{(A+B)x^4+(B+C)x^3+(2A+B+C+D)x^2+(B+C+D+E)x+A+C+E}{P_5(x)}.$$

Числители равных дробей с одинаковыми знаменателями должны быть равны:

$$(A+B)x^4+(B+C)x^3+(2A+B+C+D)x^2+(B+C+D+E)x+A+C+E\equiv 1.$$

В силу теоремы о тождественном равенстве двух многочленов приравняем коэффициенты в левой и правой частях последнего равенства при соответствующих степенях *x*. В результате приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ B+C=0, \\ 2A+B+C+D=0, \\ B+C+D+E=0, \\ A+C+E=1. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем: $A=\frac{1}{4},\ B=-\frac{1}{4},\ C=\frac{1}{4},\ D=-\frac{1}{2},\ E=\frac{1}{2}$. Итак,

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)^2}=\frac{1}{4(x+1)}-\frac{x-1}{4(x^2+1)}-\frac{x-1}{2(x^2+1)^2}.$$

2. Разложить на простейшие дроби вида функцию $\frac{x}{(x-1)(x+2)}$.

Решение.

Запишем разложение данной рациональной дроби на простейшие дроби вида (2) с буквенными коэффициентами:

$\frac{x}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$. Неизвестные коэффициенты *A*, *B* находим *методом частных значений*. Приводим дроби к одному знаменателю и приравниваем числители:

$$\frac{x}{(x-1)(x+2)}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)} \quad\Rightarrow\quad x\equiv A(x+2)+B(x-1).$$

Полагаем в этом тождестве последовательно $x=1$ и $x=-2$:

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right| \begin{array}{lcl} 1=3A & \Rightarrow & A=1/3; \\ -2=-3B & \Rightarrow & B=2/3. \end{array} \Rightarrow \frac{x}{(x-1)(x+2)}=\frac{1/3}{x-1}+\frac{2/3}{x+2}.$$

3. Разложить в сумму элементарных дробей рациональную дробь $\frac{7x^2-x+1}{x^3+1}$.

Решение.

Так как $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$, то искомое разложение имеет вид

$$\frac{7x^2-x+1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1,}\ \frac{7x^2-x+1}{x^3+1}=\frac{7x^2-x+1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1,}$$

где коэффициенты $3x^3+x^2+x+3=(x+1)(3x^2-2x+3)$ $A,\ B,\ C$ $x=1$ пока не определены.

Приводя к общему знаменателю правую часть и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем

$$\frac{7x^2-x+1}{x^3+1}=\frac{(A+B)x^2+(B+C-A)x+A+C}{x^3+1},$$

$$7x^2-x+1=(A+B)x^2=(B+C-A)x+(A+C),$$

$$A+B=7,\quad B+C-A=-1,\quad A+C=1.$$

Из этой системы уравнений находим $A=3,\ B=4,\ C=-2.$ Следовательно

$$\frac{7x^2-x+1}{x^3+1}=\frac{3}{x+1}+\frac{4x-2}{x^2-x+1}.$$

4. Разложить в сумму элементарных дробей рациональную дробь

$$\frac{x^2+x+1}{x^3-3x+2}.$$

Решение.

Очевидно, что $x=1$ является корнем знаменателя. Разлагая его с помощью *схемы Горнера* на множители, получаем

$$x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2).$$

Данную рациональную дробь представим в виде суммы элементарных дробей

$$\frac{x^2+x+1}{x^3-3x+2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2},$$

откуда

$$x^2+x+1=A(x-1)^2+B(x-1)(x+2)+C(x+2),\qquad \text{или}$$

$$x^2+x+1=(A+B)x^2+(B+C-2A)x+(A-2B+2C). \tag{1}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем уравнения $A+B=1,\ \ B+C-2A=1,\ \ A-2B+2C=1,$ из которых находим

$$A=\frac{1}{3},\quad B=\frac{2}{3},\ \ C=1.$$

Следовательно разложение примет вид

$$\frac{x^2+x+1}{x^3-3x+2}=\frac{1}{3(x+2)}+\frac{2}{3(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}.$$

З а м е ч а н и е. Коэффициенты $A,\ B,\ C$ разложения можно получить и методом частных значений.

Полагая в тождестве (1) $x=1$, получаем $3=C\cdot 3,\ C=1.$

Положив в этом тождестве $x=-2$, получаем $3=A(-3)^2$, откуда $A=\frac{1}{3}$.

Аналогично при $x=0$ находим $1=A-2B+2C$,

3. Задачи

Не вычисляя коэффициентов указать вид разложения следующих правильных рациональных дробей на простейшие:

1. $\dfrac{2x^2-10x+1}{x^3(x-1)}$. Ответ: $\dfrac{A_1}{x}+\dfrac{A_2}{x^2}+\dfrac{A_3}{x^3}+\dfrac{B}{x-1}$.

2. $\dfrac{2x+11}{x(x+2)(x+3)}$ Ответ: $\dfrac{A_1}{x}+\dfrac{A_2}{x+2}+\dfrac{A_3}{x+3}$.

3. $\dfrac{4x^3-7x}{(x^2+5)(x^2-9)}$ Ответ: $\dfrac{Ax+B}{x^2+5}+\dfrac{C}{x+3}+\dfrac{D}{x-3}$.

4. $\dfrac{26x+1}{(x^2+x+1)^2(x^2+2)}$ Ответ: $\dfrac{Ax+B}{x^2+x+1}+\dfrac{Cx+D}{(x^2+x+1)^2}+\dfrac{Ex+F}{x^2+2}$.

Найти разложение указанных дробей на простейшие:

5. $\dfrac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}$ Ответ: $\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{x-1}$.

6. $\dfrac{7x^2-x+1}{x^3+1}$ Ответ: $\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{4x-2}{x^2-x+1}$.

7. $\dfrac{x^2+x+1}{x^3-3x+2}$ Ответ: $\dfrac{1}{3(x+2)}+\dfrac{2}{3(x-1)}+\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

4. Теоретические вопросы

1. Какая функция называется рациональной алгебраической дробью?
2. 14. Какая рациональная алгебраическая дробь называется правильной?
3. 15. Какая рациональная алгебраическая дробь называется неправильной?
4. Выпишите простейшую рациональную дробь общего вида первого типа.
5. Выпишите простейшую рациональную дробь общего вида второго типа.
6. Выпишите простейшую рациональную дробь общего вида третьего типа.
7. Выпишите простейшую рациональную дробь общего вида четвертого типа.