Площадь криволинейной фигуры

1. Определения и формулы для решения задач

1^0.Площадь криволинейной фигуры, ограниченной кривыми $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ такими, что $y_1(x) \le y_2(x)$ и $a \le x \le b$

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))dx$$

Аналогично, если $x_1 = \varphi_1(y)$, $x_2 = \varphi_2(y)$, $\varphi_1(y) \le \varphi_2(y)$, то

$$S = \int_c^d (\varphi_2(y) - \varphi_1(y))dy$$

2^0.Площадь сектора, ограниченного дугой $\rho = \rho(\varphi)$ и двумя лучами (полярными радиусами) $\varphi_1 = \alpha$ и $\varphi_2 = \beta$, $\alpha < \beta$. Тогда

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi$$

3^0.Если фигура задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, где t_1 и t_2 - значения параметра t, соответствующие началу и концу обхода контура в положительном направлении (фигура остается слева) то возможны три формулы:

a) $S = -\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt;$ b) $S = \int_{t_1}^{t_2} x(t)y'(t)dt;$ c) $S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (xy' - yx')dt;$

2.Задачи с решениями.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $x^2 + 4y^2 = 8$; и $x^2 = 4y$.

Решение.

Решая систему уравнений, находим абсциссы точек пересечения эллипса и параболы $x_{1,2} = \pm 2$. Каждое из уравнений разрешаем относительно y и с учетом симметрии области получаем: $S = 2\int_0^2 (\frac{\sqrt{8 - x^2}}{2} - \frac{x^2}{4})dx$.

Для вычисления первого интеграла применяем подстановку $x = 2\sqrt{2}\sin t$. Второй интеграл вычисляется непосредственно.

Ответ: $S=(\pi+2)-\frac{4}{3}=\pi+\frac{2}{3}.$

2.Вычислить площадь области, ограниченной эллипсом $x=a\cos t, y=b\sin t.$

Решение.

В силу симметричности эллипса относительно координатных осей вычислим часть области, лежащей в первой четверти, кода $0\le x\le a$ и следовательно $\frac{\pi}{2}\le t\le 0$. $S=\int\limits_0^2\left[2^x-(2x-x^2)\right]dx=\frac{3}{\ln 2}-\frac{4}{3}$.По формуле а) вычисления площади находим

$$S=4\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}(b\sin t)(-a\sin t)dt=4ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 tdt=4ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\pi ab\,.$$

2. Вычислить площадь области, ограниченной лемнискатой $\rho^2=a^2\sin 2\varphi$.

Решение.

Принимая во внимание симметрию линии относительно полярной оси, получаем:

$$S=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}a^2\sin 2\varphi d\varphi=-a^2\cos 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=a^2\,.$$

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямыми *x=0, x=2* и кривыми $y=2^x$, $y=2x-x^2$.

Решение.

Так как максимум функции $y=2x-x^2$.достигается в точке x=1 и равен 1, а функция $y=2^x\ge 1$ на отрезке $\left[0,2\right]$, то

$$S=\int\limits_0^2\left[2^x-(2x-x^2)\right]dx=\frac{3}{\ln 2}-\frac{4}{3}.$$

5. Вычислить площадь фигуры, лежащей в первом квадранте, ограниченной линиями $y=x+1$, $y=\cos x$ и осью OX.

Решение.

Функция $y=f(x)$, составной график которой ограничивает трапецию сверху, является непрерывной на промежутке $\left[-1,\frac{\pi}{2}\right]$.

Площадь криволинейной трапеции равна

$$S=\int\limits_{-1}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int\limits_{-1}^{0}(x+1)dx+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=\frac{3}{2}\,.$$

6. Найти площадь астроиды $(x/a)^{\frac{2}{3}} + (y/a)^{\frac{2}{3}} = 1$.

Решение.

Запишем уравнение астроиды в параметрическом виде $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$. Здесь удобнее вычислить сначала $xy' - yx' = 3a^2\cos^2 t\sin^2 t$. Отсюда

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(xy' - yx')dx = \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 2tdt = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

3.Задачи

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

1. $y^2 = 2x+3$, $y = x$. Ответ: 16/3
2. $y = \sqrt{x+1}$, $y = 1-x$, $y = 0$. Ответ: 7/6
3. $y = \frac{1}{x+1}$, $y = \frac{x}{2}$, $x = 0$. Ответ: $\ln 2 - \frac{1}{4}$
4. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$. Ответ: 1
5. $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$. Ответ: 16/3
6. $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = \frac{x^2}{2}$. Ответ: $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$
7. $y = \ln x$, $x = e$, $x = e^2$. Ответ: e^2
8. $y = \cos x$, $y = \sin x$, $x = 0$. Ответ: $\sqrt{2} - 1$
9. $y = \frac{x^2}{(x^3+1)^2}$, $y = 0$ $(0 \le x < +\infty)$.Ответ: 1/3
10. $y = 4 - x^2$, $y = 0$. Ответ: 32/3

11, Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = t - sint,\ y = 1 = cost,\ 0 \le t \le 2\pi$ Ответ: 3π.

12. Найти площадь одного лепестка розы $r = cos2\varphi \quad -\pi/4 \nleq \varphi \nleq \pi/4$

13. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = (x-2)^2,\ y = 4x - 8.$ Ответ: 32/3