

Объём тела вращения

1. Определения и формулы для решения задач

Объём тела вращения вокруг оси OX или оси OY криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x) \geq 0$, осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$ ($a \leq b$) равны соответственно

$$V_X = \pi \int_a^b y^2 dx \quad (1)$$

$$V_Y = 2\pi \int_a^b xy dx \quad (2)$$

Если фигура была ограничена кривыми $0 \leq y_1(x) \leq y_2(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, то формулы примут вид:

$$V_X = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx \quad (3)$$

$$V_Y = 2\pi \int_a^b x(y_2 - y_1) dx \quad (4)$$

В том случае, когда кривая задается в иной форме (параметрически или в полярной системе координат), то в приведенных формулах нужно сделать соответствующую замену переменной интегрирования.

Объем тела образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной кривой $x = g(y)$, осью OY и прямыми $y = c$ и $y = d$ вычисляется по формуле

$$V_Y = \pi \int_c^d x^2 dy \quad (5)$$

Наконец, объем тела, получаемого при вращении сектора, ограниченно-го дугой $r = r(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ вокруг полярной оси вычисляется по формуле

$$V = \frac{2}{3} \int_\alpha^\beta r^3 \sin \varphi d\varphi \quad (6)$$

2. Задачи с решением.

1. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OY криволи-

нейной трапеции, ограниченной гиперболой

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ и прямыми } y = \pm 2b.$$

Решение.

Искомый объем найдём по формуле (5).

$$V_Y = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_{-2b}^{2b} a^2 \left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right) dy = 2\pi a^2 \int_0^{2b} \left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right) dy = \pi a^2 \left(4b + \frac{16}{3} \pi a^2 b\right) = \frac{28}{3} \pi a^2 b.$$

2. Найти объем тела, полученного вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси OY (эллипсоид вращения).

Решение.

Аналогично предыдущей задаче $V_Y = \pi \int_{-b}^b a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = \frac{4}{3} \pi a^2 b$. При $a = b = R$

получаем $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ – объем шара.

3. Найти объем тела, полученного вращением одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ вокруг оси OX .

Решение.

Так как $0 \leq t \leq 2\pi$ и $dx = a(1 - \cos t)dt$ по формуле (1) получим:

$$V_X = \pi \int_0^{2\pi a} y^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 a(1 - \cos t) dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = 5\pi^2 a^3.$$

4. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и $8x = y^2$.

Решение.

Решая систему уравнений, находим ординаты точек пересечения

$$y_1 = 0, y_2 = 4. \text{ Следовательно, } V = \pi \int_0^4 \left(y - \frac{y^4}{64}\right) dy = \frac{24}{5} \pi.$$

5. Найти объем тора, образованного вращением круга $x^2 + (y - b)^2 \leq a^2$ ($b \geq a$) вокруг оси OX .

Решение.

Имеем: $y_2 = b + \sqrt{a^2 - x^2}$. Поэтому по формуле (3)

$$V_X = 4\pi b \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 2\pi^2 a^2 b.$$

6. Определить объем тела, образованного вращением кривой $r = a \sin 2\varphi$ вокруг полярной оси.

Решение.

$$V_p = 2 \frac{2}{3} \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin \varphi d\varphi = \frac{4}{3} \pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2\varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{32}{3} \pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi \cos^3 \varphi d\varphi =$$

$$= \frac{64}{105} \pi a^3.$$

3. Задачи

Найдите объём тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями

1. $y = 0, y^2 = 4x, x = 1.$

Ответ: 2π

2. $x^2 - y^2 = a^2, x = a + h (h > 0).$

Ответ: $\frac{\pi h^2(3a + h)}{3}$

3. $y = \operatorname{ch} x, y = 0, x = -1, x = 1.$

Ответ: $\frac{\pi}{2}(2 + \operatorname{sh} 2)$

4. $y = \operatorname{sh} x, y = 0, x = 1.$

Ответ: $\frac{\pi}{4}(\operatorname{sh} 2 - 2)$

5. $y = x^2, y = \sqrt{x}.$

Ответ: $\frac{3\pi}{10}$

6. $y = 2x - x^2, y = 0.$

Ответ: $\frac{16\pi}{15}$

7. $y^2 = 4x, x^2 = 4y.$

Ответ: $\frac{96\pi}{5}$

8. $y = \operatorname{tg} x, y = 0, x = \frac{\pi}{4}.$

Ответ: $\pi\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

9. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, y = 0, x = 1, x = e.$

Ответ: $\pi/3$

10. $y^2 = xe^{-x} (0 \leq x < +\infty)$

Ответ: π

11. $y = \sqrt{x(a-x)}, y = 0.$

Ответ: $\frac{\pi a^3}{6}$

12. $y = 1 - \sin x, y = 0, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$

Ответ: $\frac{\pi}{4}(3\pi - 8)$

13. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Ответ: $\frac{4}{3}\pi ab^2$

14. $y^2 = 2px$ (парабола), $x = h$

Ответ: πrh^2

15. $y = 4 - x^2, y = 0.$

Ответ: $\frac{512\pi}{15}$