Ряды Фурье

1. Определения и формулы для решения задач

Определение

Рядом Фурье $2\pi -$ периодической функции $f\left(x\right)$ называется тригонометрический ряд вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Эти коэффициенты называются коэффициентами Фурье.

Теорема (*теорема Дирихле*). Если функция $f(x)$

1) непрерывна на промежутке $[-\pi, \pi]$ или имеет на нём конечное число разрывов первого рода;

2) имеет на промежутке $[-\pi, \pi]$ конечное число экстремумов,

то ряд Фурье $f(x)$ сходится во всех точках этого промежутка к некоторой функции $S(x)$, при этом

1) $S(x) = f(x)$ во всех точках интервала $(-\pi, \pi)$, где функция $f(x)$ непрерывна;

2) $S(x_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)\right)$, если $x_0 \in (-\pi, \pi)$ – точка разрыва первого рода функции $f(x)$;

3)

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}\left(f(-\pi) + f(\pi)\right).$$

Ряд Фурье четной функции содержит только свободный член и косинусы. Коэффициенты ряда определяются по формулам

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Ряд Фурье нечетной функции содержит только синусы. Коэффициенты ряда определяются по формулам

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Замечание 1. Если функция $f(x)$ не является $2\pi-$ периодической, а задана только, то на промежутке $[-\pi;+\pi]$, то ее разложение в ряд Фурье справедливо только для этого промежутка; вне этого промежутка значения функции и суммы ряда Фурье могут различаться.

Замечание 2. Если функция задана на неполном промежутке $[0;\pi]$, то ее можно продолжить на полный промежуток $[-\pi;+\pi]$ четным или нечетным образом. Тогда ее коэффициенты Фурье соответственно будут определяться по формулам для четной или нечетной функций, но разложение в ряд Фурье будет справедливо только для промежутка $[0;\pi]$.

Разложение функции в ряд Фурье в произвольном симметричном относительно начала промежутке

Если функция $f(x)$ задана на промежутке $[-l;+l]$, то ряд Фурье функции для этого промежутка имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l},$$

а коэффициенты Фурье находятся по формулам

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx, \quad n=1,2,\ldots,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx, \quad n=1,2,\ldots$$

2. Образцы задач с решениями

1. Дана функция $f(x)=\begin{cases} 0, & x\in[-\pi,0), \\ 1, & x\in[\pi,0]. \end{cases}$ Разложить её в ряд Фурье.

На отрезке $[-\pi,\pi]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле. Найдём её коэффициенты Фурье.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot dx+\int_{0}^{\pi} 1\cdot dx\right)=1,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi} 1\cdot\cos nx\,dx\right)=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\sin nx\,dx+\int_{0}^{\pi} 1\cdot\sin nx\,dx\right)=$$

$$-\frac{1}{\pi n}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{1-(-1)^n}{\pi n}.$$

Для выражения $1-(-1)^n$ имеем: $1-(-1)^n=\begin{cases}0, n=2k, k=1,2,...,\\ 2, n=2k-1, k=1,2,... .\end{cases}$ Итак, $a0=1$, $ak=0$, $b2k=0$, $b_{2k-1}=\dfrac{2}{\pi(2k-1)}$, $k=1,2,\ldots$. Следовательно, для функции $f(x)$ получаем ряд:

$$f(x)\sim\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}=S(x).$$

При этом, согласно теореме Дирихле, имеем:

1) $S(x)=f(x)$ при (−π, 0) $\cup$ (0, π)],

2) $S(0)=\dfrac{f(-0)+f(+0)}{2}=\dfrac{0+1}{2}=\dfrac{1}{2}$,

3) $S(\pm\pi)=\dfrac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}=\dfrac{0+1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

График $S(x)$ приведён на рис. 1.

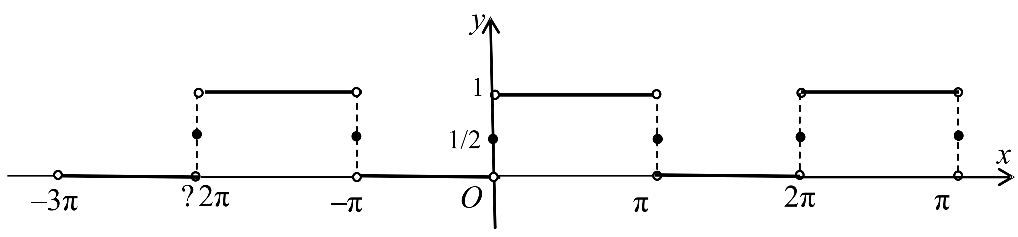

Рис.1.

2. Разложить функцию $f(x) = \pi - |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$, в ряд Фурье.

Решение. График функции $f(x)$ приведен на рис.2.

Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле $[-\pi, \pi]$ и является чётной (рис.1), поэтому её коэффициенты Фурье $b_n = 0$. Вычислим коэффициенты a_n, $n = 0,1,2,...$

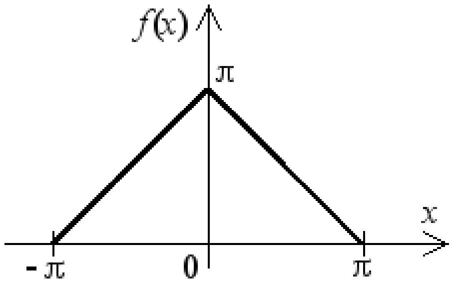

Рис.2.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{(\pi - x)^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}(\pi - x)\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx = \frac{-2}{\pi n^2}\cos nx\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left(1 - \cos n\pi\right) = \frac{2}{\pi n^2}\left[1 - (-1)^n\right].$$

Таким образом, $a_0 = \pi$, $a_{2k} = 0$, …, $a_{2k-1} = \frac{4}{\pi(2k-1)^2}$, $k = 1, 2, \ldots$. Но тогда согласно теореме Дирихле,

$$\pi - |x| = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

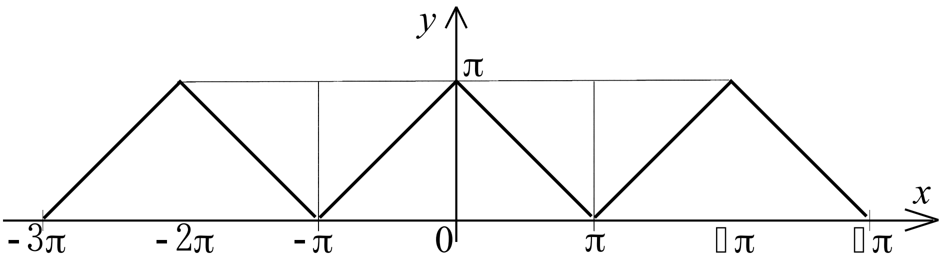

Рис. 3. График суммы ряда Фурье функции $f(x) = \pi - |x|$

График суммы ряда Фурье приведён на рис. 3.

3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x^2$, заданную на отрезке [–4, 4].
   Данная функция является чётной. Для неё ряд Фурье будет иметь вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{4}, \text{ где}$$

$$a_0 = \frac{2}{4}\int_0^4 x^2\,dx = \frac{32}{3}; \quad a_n = \frac{2}{4}\int_0^4 x^2 \cos\frac{\pi n x}{4}\,dx, \; n = 1, 2, \ldots .$$

Вычисляя соответствующие интегралы по частям, находим

$$a_n = \frac{1}{2}\left(x^2 \frac{4}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{4}\Big|_0^4 - \frac{8}{\pi n}\int_0^4 x\sin\frac{\pi n x}{4}\,dx \right) =$$

$$-\frac{4}{\pi n}\left(-x\frac{4}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{4}\Big|_0^4 + \frac{4}{\pi n}\int_0^4 \cos\frac{\pi n x}{4}\,dx \right) = \frac{64}{\pi^2 n^2}\cos\pi n = \frac{64}{\pi^2 n^2}(-1)^n.$$

Итак, функция $f(x) = x^2$ на отрезке [–4, 4] в силу теоремы Дирихле разлагается в ряд Фурье

$$x^2 = \frac{16}{3} + \frac{64}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{\pi n x}{4}, \ x \in [-4, 4].$$

График суммы ряда Фурье приведён на рис. 4.

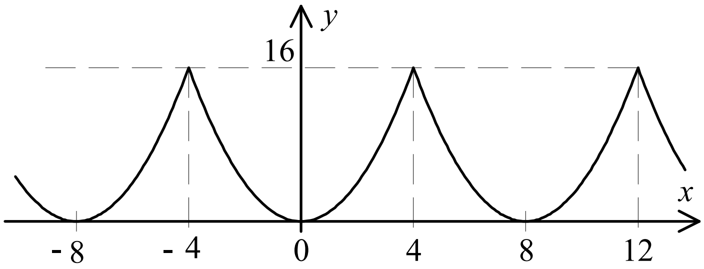

Рис. 4

4. Чему равна сумма $S(x)$ ряда Фурье, составленного для функции $y = f(x) = x^2$ на промежутке $[-\pi, \pi]$, вычисленная в точке $x = \frac{3\pi}{2}$? Разлагать функцию в ряд Фурье не нужно.

Решение. Функция $S(x)$ является $2\pi-$ периодической поэтому ее значение в точке $x = \frac{3\pi}{2}$ такое же, как в точке $\frac{3\pi}{2} - 2\pi = -\frac{\pi}{2}$, а ее значение в этой точке равно значению функции $f(x)$. Тогда

$$S\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}.$$

3.Задачи для решения

1. Разложите в интервале $(0;\pi)$ по косинусам кратных дуг функцию $y = x$.
2. Разложите в ряд Фурье в интервале $(-\pi;\pi)$ функцию $y = x$.
3. Разложите в ряд Фурье в интервале $(-\pi;\pi)$ функцию $y = |x|$
4. Разложите в интервале $(0;\pi)$ по синусам кратных дуг функцию $y = -2x$.
5. Разложите в ряд Фурье в промежутке $(-\pi;\pi)$ функцию
$$y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$
6. Разложите в ряд Фурье в промежутке $[0, 1]$ по косинусам функцию $y = 1 - x$.
7. Разложите в ряд Фурье в промежутке $(-l;l)$ по синусам функцию $y = 1 - x$.
8. Разложите в ряд Фурье в промежутке $[0, 1]$ по косинусам функцию $y = x$.
9. Разложите в ряд Фурье в промежутке $[0, 1]$ по косинусам функцию $y = 1 - x$.
10. Разложите в ряд Фурье в промежутке $(-l;l)$ по синусам функцию $y = 1 - x$.

11. Чему равна сумма ряда Фурье, составленного для функции $y = x^2$ на промежутке $[-\pi, \pi]$, вычисленная в точке $x = 2\pi$? Разлагать функцию в ряд Фурье не нужно.
12. Чему равна сумма ряда Фурье, составленного для функции $y = x^2$ на промежутке $[-\pi, \pi]$, вычисленная в точке $x = 3\pi$? Разлагать функцию в ряд Фурье не нужно.
13. Разложите в ряд Фурье в промежутке $(-\pi;\pi)$ функцию $y = 2x + 3$.
14. Разложите в ряд Фурье в промежутке $(-\pi;\pi)$ функцию $y = 2 - 3x$.
15. Разложите в ряд Фурье в промежутке $(-\pi;\pi)$ функцию $y = |\sin x|$.
16. Разложите в ряд Фурье в промежутке $(-\pi;\pi)$ функцию $y = |\cos x|$.
17. Разложите в ряд Фурье в промежутке $(-l;l)$ по косинусам кратных дуг функцию $y = |x|$.
18. Разложите в ряд Фурье в промежутке $(-l;l)$ функцию $y = 1$, если $-l \le x \le 0$ и $y = -1$, если $0 < x \le l$.
19. Разложите в ряд Фурье в промежутке $[0;l]$ по косинусам кратных дуг функцию $y = x$.
20. Разложите в ряд Фурье в промежутке $(-\pi;\pi)$ функцию $y = 2x + 1$.
21. Разложите в ряд Фурье в промежутке (-1;1) функцию $y = x$.
22. Разложите в ряд Фурье в промежутке (0;2) по косинусам кратных дуг функцию функцию $y = 2 - x$

Ответы

1. $$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

2. $$2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$$

3. $$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

4. $$4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin nx}{n}.$$

5. $$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

6. $$\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

7. $$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x}{n}.$$

8. $$\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

9. $$\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}.$$

10. $$\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

11. 0.

12. $$\pi^2.$$

13. $$3+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}..$$

14. $$2+6\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin nx}{n}.$$

15. $$\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}.$$

16. $$\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}.$$

17. $$\frac{l}{2}-\frac{4}{l\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\frac{\pi x}{l}}{(2n-1)^2}.$$

18. $$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}.$$

19. $$y=\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\frac{\pi x}{l}}{(2n-1)^2}.$$

20. $$1+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}.$$

21. $$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi x.$$

22. $$1+\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\frac{\pi x}{2}}{(2n-1)^2}$$

4.Теоретические вопросы

1. Запишите ряд Фурье нечетной функции для промежутка $[-l, l]$.
2. Запишите ряд Фурье четной функции для промежутка $[-l, l]$.
3. Запишите ряд Фурье функции $f(x)$ для промежутка $[-\pi, \pi]$.
4. Запишите формулы для коэффициентов ряда Фурье функции $f(x)$ для промежутка $[-\pi, \pi]$.
5. Запишите формулы для коэффициентов ряда Фурье функции $f(x)$ для промежутка $[-l, l]$.
6. Запишите формулы для коэффициентов ряда Фурье четной функции $f(x)$ для промежутка $[-\pi, \pi]$.
7. Запишите разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье по синусам в промежутке $[0, \pi]$.
8. Запишите разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье по косинусам в промежутке $[0, \pi]$.
9. Сформулируйте условия Дирихле разложимости функции в ряд Фурье на промежутке $[-\pi, \pi]$.
10. К чему сходится ряд Фурье функции $f(x)$ для промежутка $[-\pi, \pi]$ в точке $x = \pi$?
11. Функция $f(x)$ в промежутке $[0, \pi]$ разложена в ряд Фурье по синусам. Запишите формулы для коэффициентов ряда.

12. Функция $f(x)$ в промежутке $[0,\pi]$ разложена в ряд Фурье по косинусам. Запишите формулы для коэффициентов ряда.
13. Какая система функций называется ортогональной на отрезке [a;b] ?
14. Напишите выражение для коэффициентов ряда Фурье по произвольной ортогональной системе функций на отрезке [a;b] .
15. Чему равняется сумма ряда Фурье в точках разрыва функции $f(x)$?
16. Функция $f(x)$ разложена на промежутке $(-l;l)$ в ряд Фурье по синусам.
Напишите формулы для коэффициентов разложения.
17. Функция $f(x)$ разложена на промежутке $(-l;l)$ в ряд Фурье по косинусам. Напишите формулы для коэффициентов разложения.
18. Сформулируйте достаточные условия того, чтобы значение суммы ряда Фурье для функции $f(x)$ в точке x совпадало со значением самой функции.
19. Пусть функция $f(x)$ на промежутке $(-l;l)$ удовлетворяет условиям Дирихле. Запишите формулу, выражающую свойство периодичности суммы $S(x)$ её ряда Фурье.
20. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на промежутке $(-l;l)$, то чему равна сумма ряда Фурье этой функции на концах промежутка?
21. Напишите коэффициенты разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье в произвольном промежутке [$a;a+2l$].
22. Каким образом нужно продолжить функцию $f(x)$, заданную на промежутке $(0,l)$,чтобы её разложение в ряд Фурье на промежутке $(-l;l)$ не содержало косинусов?
23. Каким образом нужно продолжить функцию $f(x)$, заданную на промежутке $(0,l)$, чтобы её разложение в ряд Фурье на промежутке $(-l;l)$ не содержало синусов ?

Знания и умения, которыми должен владеть студент по разделам «Ряды»

<u>Знания на уровне понятий, определений, описаний, формулировок</u>

Числовой ряд. Сумма, остаток ряда. Сходимость ряда.

1. Свойства сходящихся рядов.
2. Знакочередующийся ряд.
3. Абсолютная и условная сходимости ряда.
4. Сочетательное свойство сходящихся рядов.
5. Переместительное свойство абсолютно сходящихся рядов.
6. Функциональный ряд; его область сходимости.
7. Степенной ряд; его промежуток и радиус сходимости.
8. Непрерывность суммы степенного ряда, почленное дифференцирование и интегрирование степенного ряда.
9. Ряд Тейлора.
10. Степенной ряд в комплексной области. Круг и радиус сходимости.
11. Применение степенных рядов для приближенного вычисления значений функций, неберущихся интегралов, неявных функций, решения дифференциальных уравнений.

<u>Знания на уровне доказательств и выводов</u>

1. Свойства остатка сходящегося ряда.
2. Необходимое условие сходимости ряда.
3. Признаки сходимости и расходимости рядов с положительными членами: признак сравнения в конечной и предельной формах, Даламбера, радикальный Коши, интегральный Маклорена-Коши (выборочно).
4. Обобщёный гармонический ряд. Исследование его сходимости.
5. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда. Оценка остатка ряда.
6. Необходимое и достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора на основе формулы Тейлора.

7. Теорема Абеля о сходимости степенного ряда.
8. Разложения в степенной ряд основных элементарных функций (выборочно).
9. Формулы Эйлера, связывающие показательную и тригонометрические функции.

Умения в решении задач

Студент должен уметь:

1. Устанавливать сходимость или расходимость ряда с положительными членами.
2. Устанавливать сходимость или расходимость, условную или абсолютную сходимость ряда с членами любого знака.
3. Находить радиус и промежуток сходимости степенного ряда.
4. Разлагать функции в степенной ряд.
5. Приближённо вычислять сумму ряда путём замены её частичной суммой с оценкой остатка ряда с заданной точностью.
6. Приближённо вычислять интегралы и находить приближённое решение дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.