Вычисление циркуляции векторного поля по замкнутому контуру с помощью криволинейного интеграла

1. Определения и формулы для решения задач

Определение. Криволинейный интеграл 2-го рода векторного поля $\vec{a}$ по замкнутому контуру Г называется *циркуляцией векторного поля* $\vec{a}$.

Циркуляцию принято обозначать следующим образом,

$$C = \oint_{\Gamma} a_x dx + a_y dy + a_z dz.$$

Пусть гладкая кривая Г = *AB* задана произвольными параметрическими уравнениями:

$$\Gamma:\ x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\quad t \in [\alpha, \beta],$$

причём концам *A* и *B* кривой Г отвечают значения $t = \alpha$ и $t = \beta$ соответственно.

Криволинейный интеграл 2-го рода по пространственной кривой Γ вычисляется по формуле

$$\int_{\Gamma} a_x(x,y,z)dx + a_y(x,y,z)dy + a_z(x,y,z)dz =$$

$$= \pm\int_{\alpha}^{\beta} (a_x(x(t),y(t),z(t))x_t' + a_y(x(t),y(t),z(t))y_t' + a_z(x(t),y(t),z(t))z')dt.$$

Знак «+» выбирается тогда, когда направление движения по кривой совпадает с направлением возрастания параметра и «–» в противном случае.

2. Образец задачи с решением

Даны поверхность S - часть единичной сферы $x^2+y^2+z^2=1$, лежащая в первом октанте ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$), и векторное поле

$$\bar{a}=(z+xy)\,\bar{i}+(x+yz)\,\bar{j}+(y+zx)\,\bar{k}.$$

Вычислить циркуляцию C поля $\bar{a}$ по контуру поверхности S в положительном направлении со стороны внешней нормали непосредственно с помощью криволинейного интеграла.

Пусть далее *A, B, C* – точки поверхности *S* ,лежащие на осях *Ox, Oy, Oz* соответственно. *ABCA*– замкнутый контур поверхности *S* ,по которому вычисляется циркуляция C.

Решение.

$$C=\oint\limits_{(ABCA)_+} a_x dx+a_y dy+a_z dz=3\int\limits_{AB}(z+xy)dx+(x+yz)\,dy+(y+zx)\,dz.$$

На линии *AB:* $z=0$ и $dz=0$, поэтому C= $3\int\limits_{AB} xydx+xdy$. Зададим дугу окружности *AB* параметрическими уравнениями: $x=\cos\phi;\, y=\sin\phi;\, 0\leq\phi\leq\pi/2.$ Тогда

$$C=3\int\limits_0^{\pi/2}\left(-\cos\phi\sin^2\phi+\cos^2\phi\right)d\phi=-3\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2\phi\, d\sin\phi+\frac{3}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1+\cos 2\phi)\,d\phi=\frac{3\pi}{4}-1.$$

Ответ: $\frac{3\pi}{4}-1.$

3. Задачи для решения

Вычислить циркуляцию C поля $\bar{a}$ по контуру поверхности S в положительном направлении со стороны внешней нормали непосредственно с помощью криволинейного интеграла.

Пусть далее A, B, C – точки поверхности S ,лежащие на осях

Ox, Oy, Oz соответственно. ABCA– замкнутый контур поверхности S ,по которому вычисляется циркуляция C.

1. $\overline{a} = yz\overline{i} + xz\overline{j} + xy\overline{k}.$

2. $\overline{a} = xy\overline{i} + yz\overline{j} + xz\overline{k}.$

3. $\overline{a} = xz\overline{i} + xy\overline{j} + yz\overline{k}.$

4. $\overline{a} = x^2\overline{i} + y^2\overline{j} + z^2\overline{k}.$

5. $\overline{a} = y^2\overline{i} + z^2\overline{j} + x^2\overline{k}.$

6. $\overline{a} = z^2\overline{i} + x^2\overline{j} + y^2\overline{k}.$

7. $\overline{a} = x^3\overline{i} + y^3\overline{j} + z^3\overline{k}.$

8. $\overline{a} = y^3\overline{i} + z^3\overline{j} + x^3\overline{k}.$

9. $\overline{a} = z^3\overline{i} + x^3\overline{j} + y^3\overline{k}.$

10. $\overline{a} = xy^2\overline{i} + yz^2\overline{j} + zx^2\overline{k}.$

11. $\overline{a} = x^2y\overline{i} + y^2z\overline{j} + z^2x\overline{k}.$

12. $\overline{a} = yz^2\overline{i} + zx^2\overline{j} + xy^2\overline{k}.$

Ответы.

1. C=0.
2. C= –1.
3. C=1.
4. C=0.
5.
6. 5. C= –2.
7. 6. C=2
8. 7. C=0.
9. 8. C= $-9\pi/16.$
10.
11. 9. C= $9\pi/16.$
12. 10. C=–3/4.
13. 11. C= – $3\pi/16.$
14. 12. C=0.

15.

4. Теоретические вопросы

1. Что такое циркуляция векторного поля?
2. Сформулируйте определение криволинейного интеграла 2-го рода.
3. Запишите формулу для вычисления криволинейного интеграла 2-го рода.
4. Какой физический смысл криволинейного интеграла 2-го рода.
5. Как вычислить циркуляцию векторного поля?
6. Чему равна циркуляция потенциального поля по замкнутому контуру, лежащему внутри поверхностно односвязной области?
7. Укажите физический смысл циркуляции силового поля.
8. Запишите выражение для циркуляции плоского векторного поля $\vec{a}(x, y)$ для замкнутой кривой l.

16.