Вычисление циркуляции векторного поля по замкнутому контуру с помощью формулы Стокса

1. Определения, теоремы и формулы для решения задач

Определение. Пространственная область G называется *поверхностно односвязной*, если любой контур $\Gamma \subset G$ является границей некоторой поверхности, лежащей в G.

Теорема (*теорема Стокса*). Пусть $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывно дифференцируемы в поверхностно односвязной области G, S − поверхность, содержащаяся в G, а Γ − контур, ограничивающий S.

Тогда справедлива формула:

$$\oint_\Gamma P dx + Q dy + R dz =$$

$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right] dS,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали $\vec{n}$ к поверхности S, обход конура Γ, наблюдаемый с конца вектора $\vec{n}$, кажется происходящим против часовой стрелки.

Векторная формулировка теоремы Стокса

При выполнении известных условий справедлива формула Стокса:

$$\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_\Gamma \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right] dS.$$

Если функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ считать координатами векторного поля $\vec{a}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$, то формула Стокса примет в векторных обозначениях следующий вид:

$$\oint_{\Gamma} \vec{a} d\vec{r} = \iint_{S} \operatorname{rot} \vec{a} \times \vec{n}_0 dS = \iint_{S} rot_n \bar{a} dS.$$

Таким образом, теорему Стокса (не повторяя её условий) можно сформулировать следующим образом.

Теорема Стокса. Циркуляция вектора по замкнутому контуру Г равна потоку ротора этого вектора через незамкнутую поверхность *S*, опирающуюся на контур Г.

2. Образец задачи с решением

Даны поверхность S - часть единичной сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, лежащая в первом октанте (x $\geq$ 0,y $\geq$ 0, z $\geq$ 0) , и векторное поле

$$\bar{a} = (z + xy)\,\bar{i} + (x + yz)\,\bar{j} + (y + zx)\,\bar{k}.$$

Вычислить циркуляцию С поля $\bar{a}$ по контуру поверхности *S* в положительном направлении со стороны внешней нормали с помощью формулы Стокса.

Решение.

$$C = \iint_{S} rot_n \bar{a} dS = \iint_{S} (1 - y) dydz + (1 - z)\, dzdx + (1 - x)\, dxdy.$$

В силу симметрии поля $\bar{a}$ и поверхности S вычисление циркуляции С упрощается.

С= $3\iint_{S} (1 - x) dxdy.$ Выражаем поверхностный интеграл через двойной по S_{xy} – проекции поверхности S на плоскость xOy.

Тогда С= $3\iint_{S_{xy}} (1 - x) dxdy.$ Переходим к полярным координатам. Получаем

С=

$$3\int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^1 (1 - r\cos\phi) rdr = 3\int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^1 rdr - 3\int_0^{\pi/2} \cos\phi\, d\phi \int_0^1 r^2 dr = \frac{3\pi}{4} - 1.$$

3. Задачи для решения

1. $\overline{a} = yz\overline{i} + xz\overline{j} + xy\overline{k}.$

2. $\overline{a} = xy\overline{i} + yz\overline{j} + xz\overline{k}.$

3. $\overline{a} = xz\overline{i} + xy\overline{j} + yz\overline{k}.$

4. $\overline{a} = x^2\overline{i} + y^2\overline{j} + z^2\overline{k}.$

5. $\overline{a} = y^2\overline{i} + z^2\overline{j} + x^2\overline{k}.$

6. $\overline{a} = z^2\overline{i} + x^2\overline{j} + y^2\overline{k}.$

7. $\overline{a} = x^3\overline{i} + y^3\overline{j} + z^3\overline{k}.$

8. $\overline{a} = y^3\overline{i} + z^3\overline{j} + x^3\overline{k}.$

9. $\overline{a} = z^3\overline{i} + x^3\overline{j} + y^3\overline{k}.$

10. $\overline{a} = xy^2\overline{i} + yz^2\overline{j} + zx^2\overline{k}.$

11. $\overline{a} = x^2y\overline{i} + y^2z\overline{j} + z^2x\overline{k}.$

12. $\overline{a} = yz^2\overline{i} + zx^2\overline{j} + xy^2\overline{k}.$

Ответы.

1. C=0.
2. C= –1.
3. C=1.
4. C=0.
5.
6. 5. C= –2.
7. 6. C=2
8. 7. C=0.
9. 8. C= $-9\pi/16$.
10.
11. 9. C= $9\pi/16$.
12. 10. C=–3/4.
13. 11. C= – $3\pi/16$.
14.12. C=0.

15.

4. Теоретические вопросы

1. Сформулируйте терему Стокса в скалярной форме.
2. Сформулируйте терему Стокса в векторной форме.
3. Запишите формулу Стокса в скалярной форме.
4. Что такое ротор векторного поля?
5. Запишите формулу Стокса в векторной форме.

16.