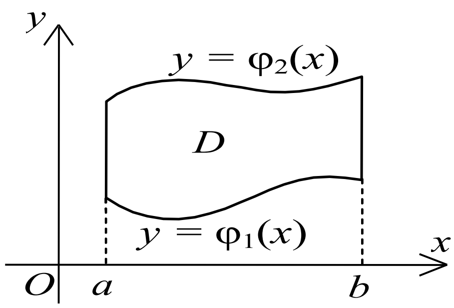
Изменение порядка интегрирования в двойном интеграле

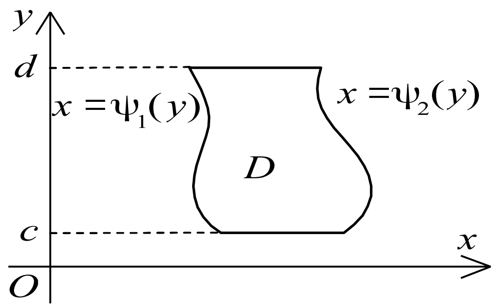
1. Формулы для решения задач

Двойной интеграл

Формулы для вычисления двойного интеграла созданы для двух стандартных областей: областей 1-го и 2-го типов. Они изображены на рис.1.



А) область 1-го типа



Б) область 2-го типа

Рис. 1. Типы стандартных областей

Формула вычисления двойного интеграла для области 1-го типа:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \quad . \qquad (1)$$

Формула вычисления двойного интеграла для области 2-го типа:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \quad . \qquad (2)$$

2. Образцы задач с решениями

Вычислить интеграл $\iint_D (2y-x)\,dxdy$, где D – область, ограниченная линиями $y=x$, $y=x^2$.

Область D (рис.2), определяемая неравенствами: $0 \le x \le 1$, $x^2 \le y \le x$, является областью 1-го типа,

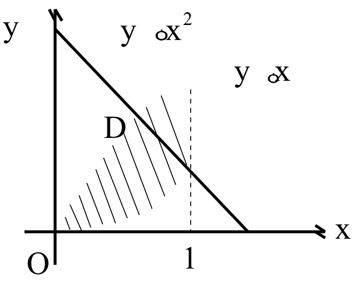


Рис.2.

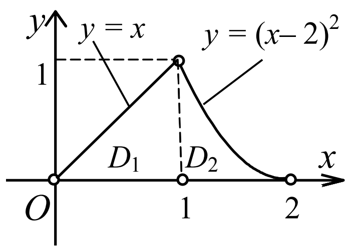
следовательно, по формуле (1) имеем:

$$\iint\limits_D (2y-x)\,dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{x}(2y-x)\,dy=\int\limits_0^1 (y^2-xy)\Big|_{y=x^2}^{y=x}dx=$$

$$=\int\limits_0^1 (x^2-x^3)\,dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{12}$$

2. Изменить порядок интегрирования в следующем выражении:

$$I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x f(x,y)dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{(x-2)^2} f(x,y)dy$$



Данное выражение есть сумма двух повторных интегралов: $I=I_1+I_2$. Первый из них взят по области D_1: $0\le x\le 1,\ 0\le y\le x;$ второй – по области D_2: $1\le x\le 2,\ 0\le y\le (x-2)^2$ (рис. 3).

Рис.3.

Рассмотрим область $D = D_1 \cup D_2$, ордината любой её точки заключена в пределах от 0 до 1 (рис.3). Чтобы найти пределы по координате x, из уравнения параболы $y=(x-2)^2$ найдём x как функцию y: $x=2\pm\sqrt{y}$, уравнение $x = 2 - \sqrt{y}$ задаёт левую ветвь параболы, а уравнение $x = 2 + \sqrt{y}$ – её правую ветвь. Для координат точек области D имеем неравенства: $0 \le y \le 1,\ y \le x \le 2 - \sqrt{y}$. Из формулы (2) следует: $I = \int_0^1 dy \int_y^{2-\sqrt{y}} f(x, y)\,dx$.

3. Задачи для решения

Измените порядок интегрирования в интеграле

1. $\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2-1}^{0} f(x, y)\,dy$

2. $\int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y)\,dy$

3. $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{4} f(x, y)\,dx$

4. $\int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} f(x, y)\,dx$

5. $\int_0^1 dx \int_{(x-1)^2}^{1-x} f(x, y)\,dy$

6. $\int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{y}}^{1-y} f(x, y)\,dx$

7. $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{1-x^2} f(x, y)\,dy$

8. $\int_0^1 dy \int_{1-y}^{\sqrt{1-y}} f(x, y)\,dx$

9. $\int_{-1}^{0} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy$

10. $\int_{-1}^{1} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy$

11. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} f(x, y)\,dx$

12. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)dx$

13. $\int_{-1}^{0} dx \int_0^{\sqrt{x+1}} f(x, y)dy$

14. $\int_0^1 dy \int_{y^2-1}^{0} f(x, y)dx$

15. $\int_{-1}^{0} dx \int_{-\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+1}} f(x, y)dy$

16. $\int_{-1}^{1} dy \int_{y^2-1}^{0} f(x, y)dx$

17. $\int_{-1}^{0} dx \int_{-\sqrt{x+1}}^{0} f(x, y)dy$

18. $\int_{-1}^{0} dy \int_{y^2-1}^{0} f(x, y)dx$

19. $\int_0^1 dx \int_{x^2-1}^{0} f(x, y)dy$

20. $\int_{-1}^{0} dy \int_0^{\sqrt{y+1}} f(x, y)dx$

21.

22.Ответы

1. $\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}}f(x,y)dx$.
2. $\int\limits_{0}^{2}dy\int\limits_{y^2}^{4}f(x,y)dx$.
3. $\int\limits_{0}^{4}dx\int\limits_{0}^{\sqrt{x}}f(x,y)dy$.
4. $\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2-1}^{0}f(x,y)dy$.
5. $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{1-\sqrt{y}}^{1-y}f(x,y)dx$.
6. $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{(x-1)^2}^{1-x}f(x,y)dy$.
7. $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{1-y}^{\sqrt{1-y}}f(x,y)dx$.
8. $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{1-x}^{1-x^2}f(x,y)dy$.
9. $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{0}f(x,y)dx$.
10. $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$.
11. $\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$.
12. $\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$.
13. $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{y^2-1}^{0}f(x,y)dx$.
14. $\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{0}^{\sqrt{x+1}}f(x,y)dy$.
15. $\int\limits_{-1}^{1}dy\int\limits_{y^2-1}^{0}f(x,y)dx$.
16. $\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{-\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+1}}f(x,y)dy$.
17. $\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{y^2-1}^{0}f(x,y)dx$.
18. $\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{-\sqrt{x+1}}^{0}f(x,y)dy$.
19. $\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{y+1}}f(x,y)dx$.
20. $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{x^2-1}^{0}f(x,y)dy$.

21.
22.
4. Теоретические вопросы
23.

1. Что называется диаметром области? Чему равен диаметр прямоугольного треугольника с катетами a и b?
2. Сформулировать определение двойного интеграла.
3. Каков физический смысл двойного интеграла $\iint_D f(x,y)\,dxdy$?
4. Каков геометрический смысл двойного интеграла $\iint_D f(x,y)\,dxdy$?
5. Как вычислить площадь области с помощью двойного интеграла в декартовых координатах?
6. Запишите формулу сведения двойного интеграла к повторному в декартовых координатах и объясните с помощью чертежа смысл входящих в формулу величин. (Рассмотрите случай, когда внешний интеграл берется по переменной x, а внутренний - по переменной y).
7. Запишите формулу сведения двойного интеграла к повторному в декартовых координатах и объясните с помощью чертежа смысл входящих в формулу величин. (Рассмотрите случай, когда внешний интеграл берется по переменной y, а внутренний - по переменной x).
8. Напишите формулу для вычисления статического момента M_y плоской пластинки с плотностью $\mu(x,y)$ распределения массы относительно оси OY с помощью двойного интеграла.
9. Напишите формулу для вычисления статического момента M_x плоской пластинки с плотностью $\mu(x,y)$ распределения массы относительно оси OX с помощью двойного интеграла.
10. Сформулируйте теорему существования двойного интеграла.
11. Сформулируйте свойство аддитивности двойного интеграла.
12. Сформулируйте свойство линейности двойного интеграла.

24.