Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода
по формуле Грина

1. **Определения и формулы для решения задач**

Определение. Плоская область D называется *односвязной*, если для любого самонепересекающегося замкнутого контура $\Gamma \subset D$ ограниченная им область D_1 также расположена в D .

Формула Грина. Пусть D – замкнутая односвязная область плоскости Oxy, ограниченная кусочно-гладким контуром Г, а функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в области D и имеют там непрерывные частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$. Тогда

$$\oint_{\Gamma} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Эта формула называется *формулой Грина* она связывает двойной интеграл по области D с криволинейным интегралом по границе Г этой области. Предполагается, что обход контура Г совершается в положительном направлении, т.е. область D при обходе контура остаётся слева

2. **Образец задачи с решением**

1. Используя формулу Грина, вычислить интеграл: $I = \oint_{\Gamma} (x - 2y)dx + (3x - y)dy$, где Г – треугольник OAB,

$O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(0,2)$. Направление движения по Г происходит против часовой стрелки.

Решение. Из условий задачи находим

$$P(x, y) = x - 2y, Q(x, y) = 3x - y, \frac{\partial Q}{\partial x} = 3, \frac{\partial P}{\partial y} = -2, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 5.$$

В силу формулы Грина имеем $I = \iint\limits_{\Delta OAB} 5\,dxdy = 5S_{\Delta OAB} = 5 \cdot 2 = 10.$

2. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл $I = \oint\limits_{l} \left(x^2 + 4y \right) dx + \left(4x + y^2 \right) dy$ по границе круга D: $x^2 + y^2 \le a^2$

в положительном направлении.

Решение.

Из условий задачи имеем $P = x^2 + 4y; Q = 4x + y^2$. Тогда

$$I = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint\limits_{D} \left(4 - 2 \right) dxdy =$$

$$= 2\iint\limits_{D} dxdy = 2(\text{площадь}\ D) = 2\pi a^2.$$

3. Задачи для решения

1. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл

$\oint\limits_{l} (x + 2y)\,dx + (3x + y^2)\,dy$, l – граница круга $x^2 + y^2 \le a^2$.

2. $\oint\limits_{l} (x^2 - y)\,dx + (2x - y^3)\,dy$, l – граница круга $x^2 + y^2 \le a^2$.

3. $\oint\limits_{l} (x^3 + 3y)\,dx + (x - 2y^2)\,dy$, l – граница круга $x^2 + y^2 \le a^2$.

4. $\oint\limits_{l} (x - 2y)\,dx + (2y - 3x)\,dy$, l – граница квадрата $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

5. $\oint\limits_{l} (x^3 + 2y)\,dx + (y^2 + 3x)\,dy$, l – граница квадрата $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

6. $\oint\limits_{l} (2x^3 - 3y)\,dx + (y^2 + 2x)\,dy$, l – граница квадрата $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

7. $\oint\limits_l (x-y)\,dx+(x+3y)\,dy$, l – граница квадрата $-1\le x\le 1$, $-1\le y\le 1$.

8. $\oint\limits_l (x+y)\,dx+(x-2y)\,dy$, l – граница квадрата $-1\le x\le 1$, $-1\le y\le 1$.

9. $\oint\limits_l (x^2+2y)\,dx+(2x-y^2)\,dy$, l – граница квадрата $-1\le x\le 1$, $-1\le y\le 1$.

10. $\oint\limits_l (x+4y)\,dx+(x+y^2)\,dy$, l – граница верхнего полукруга $x^2+y^2\le 4$.

11. $\oint\limits_l (x+5y)\,dx+(2x+y^2)\,dy$, l – граница верхнего полукруга $x^2+y^2\le 4$.

12. $\oint\limits_l (x-3y)\,dx+(2x+y^3)\,dy$, l – граница верхнего полукруга $x^2+y^2\le 4$ ($y\ge 0$).

13. $\oint\limits_l (x-5y)dx+(x+y^3)dy$, l – граница прямоугольника $0\le x\le 2;$ $0\le y\le 1.$

14. $\oint\limits_l (x^2-3y)dx+(x+y^2)dy$, l – граница прямоугольника $0\le x\le 2;$ $0\le y\le 1.$

15. $\oint\limits_l (x^3-2y)dx+(x+y^3)dy$, l – граница прямоугольника $0\le x\le 2;$ $0\le y\le 1.$

16. $\oint\limits_l (x^2-4y)dx+(x+y^3)dy$, l – граница прямоугольника $0\le x\le 2;$ $0\le y\le 1.$

17. $\oint\limits_l (x^2-4y)dx+(x+2y^2)dy$, l – граница прямоугольника $0\le x\le 2;$ $0\le y\le 2.$

18. $\oint\limits_l (x^2-3y)dx+(x-2y^2)dy$, l – граница прямоугольника $0\le x\le 2;$

$0 \le y \le 2$.

19. $\oint\limits_l (2x^2 - y)dx + (x + y^2)dy$, l – граница прямоугольника $0 \le x \le 2$; $0 \le y \le 2$.

20. $\oint\limits_l (x^2 - 2y)dx + (x - y^2)dy$, l – граница прямоугольника $0 \le x \le 2$; $0 \le y \le 2$.

Ответы

1. πa^2.
2. $3\pi a^2$.
3. $-2\pi a^2$.
4. -1.
5. 1.
6. 5.
7. 8.
8. 0.
9. 0.
10. -6π.
11. -6π.
12. 10π.
13. 12.
14. 8.
15. 6.
16. 10.
17. 20.
18. 16.
19. 8
20. 12.

21.

22.

4. **Теоретические вопросы**

1. Запишите формулу Грина.
2. Как вычислить площадь плоской области D с помощью криволинейного интеграла по границе L этой области?
3. Сформулируйте необходимые и достаточные условия полного дифференциала для дифференциального выражения $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.
4. Какие условия, накладываемые на функции, обеспечивают применимость формулы Грина?
5. Сформулируйте определение криволинейного интеграла 1-го рода (по длине дуги).
6. Каков физический смысл криволинейного интеграла 1-го рода (по длине дуги)?
7. Как выражается длина дуги с помощью криволинейного интеграла 1-го рода? Как вычислить длину дуги линии, если линия задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$?
8. Запишите формулу для вычисления криволинейного интеграла 1-го рода (по длине дуги) в случае параметрического задания плоской линии интегрирования: $x = x(t)$, $y = y(t)$.
9. Запишите формулу для вычисления массы линии, если плотность распределения массы задана формулой $\delta = \delta(x,y,z)$.
10. Что такое среднее значение функции $f(x,y,z)$ на дуге линии $L = \breve{AB}$?
11. Запишите формулу для вычисления криволинейного интеграла 1-го рода (по длине дуги) в случае плоской линии, заданной явным уравнением $y = y(x)$.
12. Запишите формулу для вычисления криволинейного интеграла 1-го рода (по длине дуги) в случае параметрического задания линии интегрирования: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

23.