Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода по плоской кривой

1. Формулы для решения задач

Пусть гладкая кривая $\Gamma = AB$ задана произвольными параметрическими уравнениями:

$$\Gamma:\ x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\quad t \in [\alpha, \beta],$$

причём концам A и B кривой Γ отвечают значения $t = \alpha$ и $t = \beta$ соответственно.

Криволинейный интеграл 2-го рода обозначатся символом

$$\int_\Gamma P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Криволинейный интеграл 2-го рода по пространственной кривой Γ

Вычисляется по формуле

$$\int_\Gamma P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \pm\int_\alpha^\beta (P(x(t),(y),(z))x_t' + Q(x(t),(y),(z))y_t' + R(x(t),(y),(z))z')dt.$$

Знак «+» выбирается тогда, когда направление движения по кривой совпадает с направлением возрастания параметра и «–» в противном случае.

В частности, для случая криволинейного интеграла 2-го рода по плоской кривой AB, заданной явным уравнением $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, причём перемещение от точки A к точке B происходит при изменении x от a к b. Предполагая, что $f(x)$ непрерывна (кусочно-непрерывна) вместе со своей производной на $[a,b]$, будем иметь:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \big(P(x, f(x)) + Q(x, f(x))\big) f'(x)dx$$

2. Образцы задач с решениями

1. Вычислить работу силы $\vec{F}(x,y) = xy\vec{i} + (y-x)\vec{j}$ при перемещении материальной точки по параболе $y = x^2$ от точки $B(0,0)$ до точки $C(1,1)$.

Решение.

Работа данной силы вдоль дуги BC определяется равенством: $A = \int\limits_{BC} xy\,dx + (y - x)dy$. По формуле для вычисления криволинейного интеграла 2-го рода имеем:

$$A = \int\limits_{BC} xy\,dx + (y-x)\,dy = \int\limits_0^1 \left[x^3 + (x^2 - x)\times 2x\right]dx = \int\limits_0^1 (3x^3 - 2x^2)\,dx =$$

$$= \left(3x^4/4 - 2x^3/3\right)\Big|_0^1 = 3/4 - 2/30 = 1/12.$$

2 Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{OA} x^4y^3\,dx + x^3y^4dy$ по отрезку OA от точки $O(0,0)$ до точки $A(1,1)$.

Решение. Прямая, проходящая через точки O и A имеет уравнение $y = x$. Тогда данный интеграл сводится к определенному интегралу:

$$\int\limits_{OA} x^4y^3\,dx + x^3y^4dy = 2\int\limits_0^1 x^7dx = 2\frac{x^8}{8}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

3 Задачи для решения

Вычислить криволинейный интеграл

1. $\int\limits_{OA} x^2y\,dx + xy^2dy$ по отрезку OA от точки $O(0,0)$ до точки $A(1,1)$.

2. $\int\limits_{OA} y\,dx + x\,dy$ по отрезку OA от точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 1)$.

3. $\int\limits_{OA} xy\,dx + x^2 dy$ по параболе $y = x^2$ от точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 1)$.

4. $\int\limits_{OA} y\,dx - x^2 dy$ по параболе $y = x^2$ от точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 1)$.

5. $\int\limits_{OA} y^2 dx - x\,dy$ по параболе $y = x^2$ от точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 1)$.

6. $\int\limits_{OA} y^3 dx + x\,dy$ по отрезку от точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 1)$.

7. $\int\limits_{OA} y^2 dx + x^2 dy$ по кривой $y = x^3$ от точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 1)$.

8. $\int\limits_{OA} y^2 dx - x^2 dy$ по кривой $y = x^3$ от точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 1)$.

9. $\int\limits_{OA} y^2 dx - x^2 dy$ по параболе $y = \sqrt{x}$ от точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 1)$.

10. $\int\limits_{OA} y^2 dx - \sqrt{x}\,dy$ по параболе $y = \sqrt{x}$ от точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 1)$.

11. $\int\limits_{OA} y\,dx - x\,dy$ по кривой $y = x^3$ от точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 1)$.

12. $\int\limits_{OA} y^2 dx + x^2 dy$ по параболе $y = \sqrt{x}$ от точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 1)$.

13. $\int\limits_{OA} x^3 y dx + x y^3 dy$ по отрезку от точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 1)$.

14. $\int\limits_{OA} x^2 y^2 dx + x y^3 dy$ по отрезку от точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 1)$.

15. $\int\limits_{OA} x y^2 dx + 2x^2 y dy$ по отрезку от точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 1)$.

16. $\int_{OA} 3x^2 y dx - xy^2 dy$ по отрезку от точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 1)$.

17. $\int_{OA} y^2 dx + 2x\sqrt{x} dy$ по параболе $y = \sqrt{x}$ от точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 1)$.

18. $\int_{OA} y^4 dx + 4x^2\sqrt{x} dy$ по параболе $y = \sqrt{x}$ от точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 1)$.

19. $\int_{OA} x^2 y dx - x^2 y^2 dy$ по параболе $y = x^2$ от точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 1)$.

20. $\int_{OA} xy dx + x^2 y^2 dy$ по параболе $y = x^2$ от точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 1)$.

Ответы

1. $1/2$.
2. 1.
3. $3/4$.
4. $-1/6$.
5. $-7/15$.
6. $3/4$.
7. $26/35$.
8. $-16/35$.
9. $3/10$.
10. 0.
11. $-1/2$.
12. $7/10$.
13. $2/5$.
14. $2/5$.
15. $3/4$.
16. $1/2$.
17. 1.
18. 1.
19. $-1/20$.
20. $1/2$.

21.

22.

4 Теоретические вопросы

23.

1. Сформулируйте определение криволинейного интеграла 2-го рода (по координате x).
2. Что такое криволинейный интеграл 2-го рода общего вида (по координатам x, y, z)?
3. Запишите формулу для вычисления криволинейного интеграла $\int\limits_{AB} f(x,y)\,dx$ в случае задания плоской дуги AB явным уравнением $y = y(x)$.
4. Запишите формулу для вычисления криволинейного интеграла $\int\limits_{AB} f(x,y,z)\,dx$ в случае параметрического задания линии интегрирования: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.
5. Как выражается работа силы $\vec{F} = (P(M), Q(M), R(M))$ вдоль линии AB от точки A до точки B через криволинейный интеграл по координатам?
6. Что происходит с криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода при смене направления интегрирования на противоположное?
7. Запишите свойство аддитивности криволинейного интеграла $\int\limits_{AB} f(M)\,dx$.
8. Запишите свойство линейности на примере криволинейного интеграла по координате x.
9. Запишите формулу для вычисления криволинейного интеграла $\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ в случае параметрического задания плоской кривой: $x = x(t)$, $y = y(t)$.

10. Какие условия, накладываемые на подынтегральные функции и линию интегрирования, обеспечивают существование криволинейного интеграла $\int\limits_{AB} P(M)\,dx + Q(M)\,dy + R(M)\,dz$?

11. Какие условия обеспечивают независимость криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования на плоскости?

12. Какие условия обеспечивают равенство нулю криволинейного интеграла 2-го рода по замкнутому контуру на плоскости?

24.