Вычисление массы тела с помощью тройного интеграла

1. Формулы для решения задач

Сферические координаты (ρ, ϕ, θ) вводятся следующими соотношениями:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\cos\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\cos\theta, \\ z = \rho\sin\theta, \end{cases} \quad \rho \ge 0, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

Координатными поверхностями сферической системы координат являются (рис. 1) :

1) $\rho = \rho_0$ – сферы радиуса ρ_0 с центром в начале координат

2) $\phi = \phi_0$ – полуплоскости, проходящие через ось *Oz*;

3) $\theta = \theta_0$ – верхняя (нижняя) часть конической поверхности.

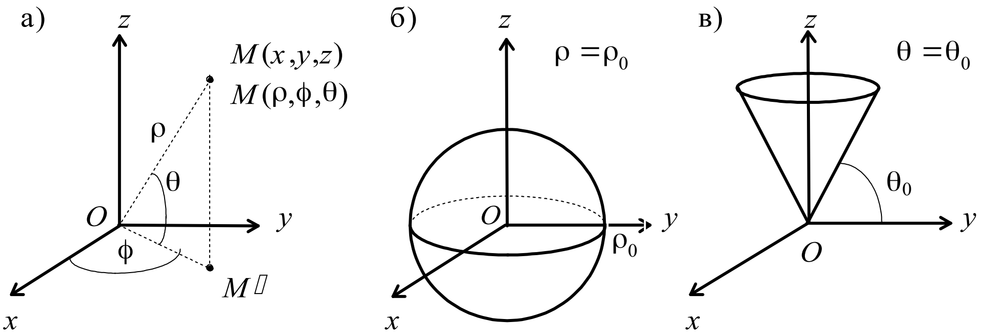

Рис. 1. координатные поверхности

формула перехода в тройном интеграле к сферическим координатам имеет вид:

$$\iiint\limits_G f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz = \\ = \iiint\limits_{G'} f(\rho\cos\varphi\cos\theta,\ \rho\sin\varphi\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\rho^2\cos\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta \quad . \qquad (2)$$

Пусть для сферических координат точек области G установлены неравенства: $\alpha \le \phi \le \beta,\quad \theta_1(\phi) \le \theta \le \theta_2(\phi)$, $\rho_1(\phi,\theta) \le \rho \le \rho_2(\phi,\theta)$, тогда от тройного интеграла в сферических координатах в (2) можно перейти к трёхкратному:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \\ = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \cos\theta\,d\theta \int\limits_{\rho_1(\varphi,\theta)}^{\rho_2(\varphi,\theta)} \rho^2 f(\rho\cos\varphi\cos\theta,\ \rho\sin\varphi\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\,d\theta \qquad (3)$$

2. Образец задачи с решением

Найти массу m полушара $x^2+y^2+z^2 \le a^2$; $z \ge 0$ с плотностью $\delta = (x^2+y^2+z^2)^{3/2}/a^3$.

Решение.

Масса тела T с плотностью $\delta(x,y,z)$ выражается тройным интегралом $m = \iiint\limits_T \delta(x,y,z)\,dxdydz$. Перейдем к сферическим координатам. При этом $\delta = \dfrac{\rho^3}{a^3}$;

$m = \iiint\limits_{G'} \frac{\rho^3}{a^3} \rho^2 \cos\theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$. Переходим к повторному интегралу и расставляем пределы интегрирования соответственно данному полушару. Получаем

$$m = \frac{1}{a^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta \int_0^a \rho^5 d\rho =$$

$$= \frac{1}{a^3} 2\pi \sin\theta \Big|_0^{\pi/2} \frac{a^6}{6} = \frac{\pi a^3}{3}.$$

3. Задачи для решения

Найти массу тела:

1. части шара $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$, находящейся в 1-м октанте ($x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$), с плотностью $\delta = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} / a$.
2. части шара $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$, находящейся в 1-м октанте ($x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$), с плотностью $\delta = (x^2 + y^2 + z^2) / a^2$.
3. части шара $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$, находящейся в 1-м октанте ($x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$), с плотностью $\delta = (x^2 + y^2 + z^2)^2 / a^4$.
4. части шара $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$, находящейся в 1-м октанте ($x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$), с плотностью $\delta = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} / a^3$.
5. части шара $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$, находящейся в 1-м октанте ($x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$), с плотностью $\delta = (x^2 + y^2 + z^2)^{5/2} / a^5$.

6. части шара $x^2+y^2+z^2\le a^2$, находящейся в 1-м октанте ($x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$), с плотностью $\delta=(x^2+y^2+z^2)^3/a^6$.

7. части шара $x^2+y^2+z^2\le a^2$, находящейся в 1-м октанте ($x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$), с плотностью $\delta=x/a$.

8. части шара $x^2+y^2+z^2\le a^2$, находящейся в 1-м октанте ($x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$), с плотностью $\delta=y/a$.

9. части шара $x^2+y^2+z^2\le a^2$, находящейся в 1-м октанте ($x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$), с плотностью $\delta=z/a$.

10. части шара $x^2+y^2+z^2\le a^2$, находящейся в 1-м октанте ($x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$), с плотностью $\delta=(x^2+y^2)/a^2$.

11. части шара $x^2+y^2+z^2\le a^2$, находящейся в 1-м октанте ($x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$), с плотностью $\delta=\sqrt{x^2+y^2}/a$.

12. части шара $x^2+y^2+z^2\le a^2$, находящейся в 1-м октанте ($x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$), с плотностью $\delta=(x^2+y^2+z^2)^5/a^{10}$.

13. шара $x^2+y^2+z^2\le a^2$ с плотностью $\delta=(x^2+y^2+z^2)/a^2$.

14. шара $x^2+y^2+z^2\le a^2$ с плотностью $\delta=\sqrt{x^2+y^2+z^2}/a$.

15. шара $x^2+y^2+z^2\le a^2$ с плотностью $\delta=(x^2+y^2+z^2)^2/a^4$.

16. шара $x^2+y^2+z^2\le a^2$ с плотностью $\delta=(x^2+y^2+z^2)^3/a^6$.

17. полушара $x^2+y^2+z^2\le a^2$; $z\ge 0$ с плотностью $\delta=\sqrt{x^2+y^2+z^2}/a$.

18. полушара $x^2+y^2+z^2\le a^2$; $z\ge 0$ с плотностью $\delta=(x^2+y^2+z^2)/a^2$.

19. полушара $x^2+y^2+z^2\le a^2$; $z\ge 0$ с плотностью $\delta=(x^2+y^2+z^2)^2/a^4$.

20. полушара $x^2+y^2+z^2\le a^2$; $z\ge 0$ с плотностью $\delta=(x^2+y^2+z^2)^3/a^6$.

Ответы

1. $\pi a^3/8$.
2. $\pi a^3/10$.
3. $\pi a^3/14$.
4. $\pi a^3/12$.
5. $\pi a^3/16$.
6. $\pi a^3/18$.
7. $\pi a^3/16$.
8. $\pi a^3/16$.
9. $\pi a^3/16$.
10. $\pi a^3/15$.
11. $\pi a^3/32$.
12. $\pi a^3/26$.
13. $4\pi a^3/5$.
14. πa^3.
15. $4\pi a^3/7$.
16. $4\pi a^3/9$.
17. $\pi a^3/2$.
18. $2\pi a^3/5$.
19. $2\pi a^3/7$.
20. $2\pi a^3/9$.

21.

4. **Теоретические вопросы**

1. Как вычислить массу тела с плотностью $\delta(x, y, z)$ в сферических координатах с помощью тройного интеграла?
2. Что такое якобиан преобразования в случае перехода от декартовых координат к криволинейным в тройном интеграле?
3. Напишите якобиан преобразования в случае перехода от декартовых координат к цилиндрическим в тройном интеграле. Чему он равен?
4. Напишите якобиан преобразования в случае перехода от декартовых координат к сферическим в тройном интеграле. Чему он равен?
5. Запишите формулу перехода от декартовых координат к сферическим в тройном интеграле.
6. Запишите формулу для вычисления объема тела с помощью тройного интеграла в сферических координатах.

22.

7. Напишите формулы перехода от декартовых координат к сферическим. Что представляют собой координатные поверхности $\rho = \rho_0$; $\phi = \phi_0$; $\psi = \psi_0$?
8. Какое тело ограничено поверхностями

23. $\rho = \rho_1; \rho = \rho_2; \rho_1 < \rho_2$?

9. Сформулируйте определение тройного интеграла.
10. Сформулируйте свойство аддитивности для тройного интеграла.
11. Сформулируйте свойство линейности для тройного интеграла.
12. Сформулируйте теорему существования тройного интеграла.

24.