Выражение массы тела через тройной интеграл в цилиндрических координатах

1. Определения и формулы для решения задач

Определение. Цилиндрическим брусом, ориентированным по оси Oz (рис. 1). Называется тело G, ограниченное цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz, поверхностями (S_2): $z=\psi_2(x,y)$ и (S_1): $z=\psi_1(x,y)$ сверху и снизу.

Пусть D – проекция G на плоскость Oxy, а функции ψ_1 и ψ_2 непрерывны на D – при этом $\psi_1(x,y)\le\psi_2(x,y)$, а прямая, проходящая через любую точку области D параллельно оси Oz, пересекает поверхности (S_2), (S_1) в одной точке.

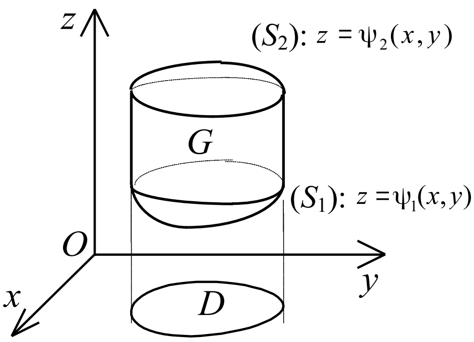

Рис. 1. Цилиндрический брус, ориентированный по оси Oz

Теорема. Для функции $f(x,y,z)$, непрерывной на G, справедливо равенство:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \quad (1)$$

Во внутреннем интеграле интегрирование проводится по z при фиксированных x и y. Полученная функция от x, y затем интегрируется по области D.

Итак, формула (1) сводит вычисление тройного интеграла к вычислению определённого и двойного интегралов.

Замечание 1. Пусть D – область, например, 1-го типа, т.е. область, определяемая неравенствами $a \le x \le b$, $\phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)$. Тогда формула (1) переписывается так:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz. \qquad (2)$$

Интеграл в правой части равенства (2) называется *трёхкратным* или повторным интегралом. Его вычисление сводится к вычислению трёх определённых интегралов.

Цилиндрические координаты. Цилиндрические координаты (r,ϕ,z) вводятся следующими соотношениями:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases} \qquad r \ge 0, \quad 0 \le \varphi < 2\pi \quad (-\pi \le \varphi < \pi). \qquad (3)$$

Цилиндрические координаты представляют собой соединение полярных координат (r,ϕ) точки M' – проекции данной точки M в плоскость Oxy (рис. 2а) и аппликаты самой точки M.

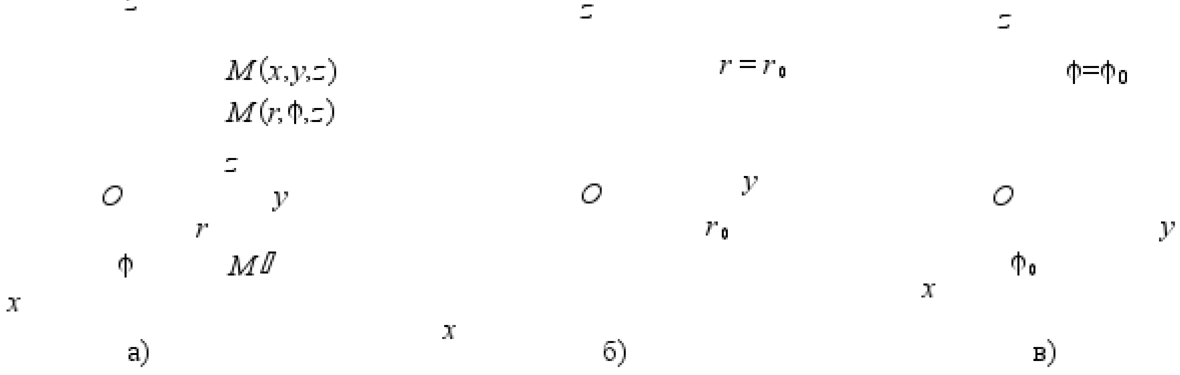

Рис 2. Цилиндрические координаты (а) и

координатные поверхности $r = r_0$ (б) и $\phi = \phi_0$ (в)

Координатные поверхности цилиндрической системы координат:

1) $r = r_0$ – круговой цилиндр с осью Oz (рис 2б);

2) $\phi = \phi_0$ – полуплоскость, проходящая через ось Oz (рис. 2в);

3) $z = z_0$ – плоскость, параллельная плоскости Oxy.

В цилиндрических координатах формула перехода в тройном интеграле от декартовых координат к цилиндрическим имеет вид:

$$\iiint\limits_G f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{G'} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)\,r\,dr\,d\phi\,dz. \qquad (4)$$

Пусть для цилиндрических координат точек области (V) справедливы неравенства: $\alpha \le \phi \le \beta,\quad r_1(\phi) \le r \le r_2(\phi)$, $z_1(\phi, r) \le z \le z_2(\phi, r)$, тогда от тройного интеграла в правой части (4) можно перейти к трёхкратному по формуле:

$$\iiint\limits_{G'} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)\,r\,dr\,d\varphi\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r\,dr \int\limits_{z_1(r,\varphi)}^{z_2 r,\varphi)} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)\,dz.$$

Тогда формула (4) преобразуется к виду:

$$\iiint\limits_G f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r\,dr \int\limits_{z_1(r,\varphi)}^{z_2(r,\varphi)} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)\,dz. \qquad (5)$$

2. Образец задачи с решением

Выразить массу m тела T с плотностью $\delta(x, y, z)$ тройным интегралом в цилиндрических координатах. В повторном интеграле расставить пределы интегрирования для тела T, заданного неравенствами $z \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 4$ и ограниченного поверхностями

$x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 4$.

Решение.

Первое уравнение определяет сферу радиуса 3 с центром в начале координат, второе – круговой цилиндр радиуса 2, ось которого совпадает с осью Oz (рис. 1). Масса тела выражается формулой:

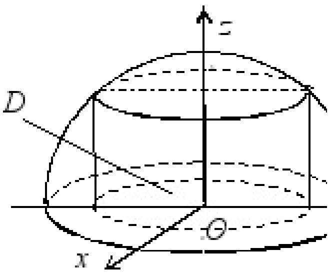

Рис. 3.

$$m = \iiint\limits_T \delta(x, y, z)dzdydz.$$

Проекция области T на плоскость Oxy – круг радиуса 2 (на рис.3 он заштрихован). Снизу область T ограничена плоскостью $z = 0$, сверху – сферой с уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Перейдём в уравнениях сферы и цилиндра к цилиндрическим координатам:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \Rightarrow r^2 + z^2 = 9 \Rightarrow z = \sqrt{9 - r^2},\ x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow r = 2.$$

Для цилиндрических координат любой точки области T имеем: $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq z \leq \sqrt{9 - r^2}$. Используя формулу (5), от тройного интеграла в перейдём к трёхкратному интегралу в цилиндрических координатах:

$$m = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^2 rdr \int\limits_0^{\sqrt{9-r^2}} \delta(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, dz.$$

Положив $\delta = z$, вычислим интеграл:

$$m = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 rdr \int\limits_0^{\sqrt{9-r^2}} zdz = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r\, z^2\Big|_0^{\sqrt{9-r^2}} dr = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^2 r(9 - r^2)dr =$$

$$= -\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^2 (9 - r^2)d(9 - r^2) = -\frac{1}{8}\int\limits_0^{2\pi} (9 - r^2)^2\Big|_0^2 d\phi = -\frac{1}{8}\int\limits_0^{2\pi} (25 - 81)d\phi$$

$$= 14\pi.$$

3. Задачи для решения

Выразите массу m тела T с плотностью $\delta(x, y, z)$ тройным интегралом в цилиндрических координатах. В повторном интеграле расставьте пределы интегрирования, соответствующие ограничивающим поверхностям:

1. $z = 0$; $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$.
2. $z = x^2 + y^2$; $z = 2a^2$; $x^2 + y^2 = a^2$.
3. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $z = 0$; $x^2 + y^2 = a^2$.
4. $z = 0$; $z = a^2 - x^2 - y^2$.
5. $z = a$; $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
6. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$.
7. $z = 0$; $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$; $y = 0$ ($y \geq 0$).
8. $z = 0$; $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $x^2 + y^2 = 1$; $x = 0$ ($x \geq 0$).
9. $z = x^2 + y^2$; $z = 1$; $x = 0$; $y = 0$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$).
10. $z = x^2 + y^2$; $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
11. $z = x^2 + y^2$; $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$.
12. $z = x^2 + y^2$; $z = 2 - x^2 - y^2$.
13. $z = 0$; $z = x^2 + y^2$; $x^2 + y^2 = 1$.
14. $z = x^2 + y^2$; $z = -x^2 - y^2$; $x^2 + y^2 = 1$.
15. $z^2 = x^2 + y^2$; $x^2 + y^2 = 1$.
16. $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$; $z = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$.

17.: $z = 1 - x^2 - y^2$; $z = x^2 + y^2 - 1$;

18. $z=\sqrt{1+x^2+y^2}$; $x^2+y^2=1$; $z=0$.

19. $z=\sqrt{1+x^2+y^2}$; $z=\sqrt{2}$;

20. $z=1-x^2-y^2$; $z=\sqrt{x^2+y^2}-1$

Ответы

1. $$m=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{2a}rdr\int_0^{2a-r}\delta(r\cos\phi,r\sin\phi,z)dz.$$

2. $$m=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{a}rdr\int_{r^2}^{2a^2}\delta(r\cos\phi,r\sin\phi,z)dz.$$

3. $$m=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{a}rdr\int_0^{r}\delta(r\cos\phi,r\sin\phi,z)dz.$$

4. $$m=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{a}rdr\int_0^{a^2-r^2}\delta(r\cos\phi,r\sin\phi,z)dz.$$

5. $$m=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{a}rdr\int_r^{a}\delta(r\cos\phi,r\sin\phi,z)dz.$$

6. $$m=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{a}rdr\int_r^{2a-r}\delta(r\cos\phi,r\sin\phi,z)dz.$$

7. $$m=\int_0^{\pi}d\phi\int_0^{1}rdr\int_0^{1-r}\delta(r\cos\phi,r\sin\phi,z)dz.$$

8. $$m=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\phi\int_0^{1}rdr\int_0^{r}\delta(r\cos\phi,r\sin\phi,z)dz.$$

9. $$m=\int_0^{\pi/2}d\phi\int_0^{1}rdr\int_{r^2}^{1}\delta(r\cos\phi,r\sin\phi,z)dz.$$

10. $$m=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{1}rdr\int_{r^2}^{r}\delta(r\cos\phi,r\sin\phi,z)dz.$$

11. $$m=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{1}rdr\int_{r^2}^{2-r}\delta(r\cos\phi,r\sin\phi,z)dz.$$

12. $$m=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^1 rdr\int_{r^2}^{2-r^2}\delta(r\cos\phi, r\sin\phi, z)dz.$$

13. $$m=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^1 rdr\int_{0}^{r^2}\delta(r\cos\phi, r\sin\phi, z)dz.$$

14. $$m=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^1 rdr\int_{-r^2}^{r^2}\delta(r\cos\phi, r\sin\phi, z)dz.$$

15. $$m=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^1 rdr\int_{-r}^{r}\delta(r\cos\phi, r\sin\phi, z)dz.$$

16. $$m=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^1 rdr\int_{r-1}^{1-r}\delta(r\cos\phi, r\sin\phi, z)dz.$$

17. $$m=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^1 rdr\int_{r^2-1}^{1-r^2}\delta(r\cos\phi, r\sin\phi, z)dz.$$

18. $$m=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^1 rdr\int_{0}^{\sqrt{1+r^2}}\delta(r\cos\phi, r\sin\phi, z)dz.$$

19. $$m=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^1 rdr\int_{\sqrt{1+r^2}}^{\sqrt{2}}\delta(r\cos\phi, r\sin\phi, z)dz.$$

20. $$m=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^1 rdr\int_{r-1}^{1-r^2}\delta(r\cos\phi, r\sin\phi, z)dz.$$

4. Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение тройного интеграла?
2. Каков физический смысл тройного интеграла?
3. Каков геометрический смысл интеграла $\iiint\limits_T dxdydz$?
4. Дайте определение среднего значения функции $f(x,y,z)$ в пространственной области T.
5. Что такое цилиндрический брус?

6. Запишите формулу сведения тройного интеграла к повторному в декартовых координатах для случая цилиндрического бруса.
7. Запишите формулу для вычисления объема тела с помощью тройного интеграла в декартовых координатах.
8. Запишите формулу для вычисления массы тела с помощью тройного интеграла в декартовых координатах.
9. Как вычислить массу тела с плотностью $\delta(x, y, z)$ в цилиндрических координатах с помощью тройного интеграла?
10. Запишите формулу перехода от декартовых координат к цилиндрическим в тройном интеграле.
11. Запишите формулу для вычисления объема тела с помощью тройного интеграла в цилиндрических координатах.
12. Напишите формулы перехода от декартовых координат к цилиндрическим. Что представляют собой координатные поверхности $r = r_0$; $\phi = \phi_0$; $z = z_0$?