§ 1. Числовые ряды

1. Теоремы и формулы для решения задач

Теорема (*необходимое условие сходимости ряда*)**.** Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его общий член стремится к нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Следствие из теоремы Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$

Теорема (*признак сравнения в форме неравенства*). Пусть имеются два ряда с неотрицательными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, причём члены первого ряда не превосходят, начиная с некоторого номера m, соответствующих членов второго ряда:

$$a_n \leq b_n,\ n = m\ ,\ m+1,\ m+2,\ \ldots$$

Тогда из сходимости второго ряда следует сходимость первого ряда, а из расходимости первого ряда следует расходимость второго.

Теорема (*признак сравнения в предельной форме*). Пусть члены рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ строго положительны, т.е. $a_n > 0,\ b_n > 0$ для всех $n \in \boldsymbol{N}$. Если существует конечный, отличный от нуля, предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l\ ,\ l \neq 0,\ l \neq +\infty,$$

то данные ряды сходятся или расходятся одновременно.

Следствие из теоремы. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами, причём $a_n \to 0$ при $n \to \infty$. Если $a_n \sim \dfrac{C}{n^a}$ при $n \to \infty$, где C – постоянное число, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 \leq \alpha \leq 1$ (здесь ~ является знаком эквивалентности).

Теорема (*интегральный признак Коши*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна, положительна и убывает при $x \geq 1$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = f(n)$ для $\forall$ $n \in \boldsymbol{N}$, и несобственный интеграл $\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Теорема (*признак Даламбера*). Пусть $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ (конечный или бесконечный).

Если $0 \leq l < 1$, то ряд сходится.

Если $l > 1$, то ряд расходится.

Замечание. Если $l = 1$, то признак Даламбера не даёт определённого ответа о сходимости ряда. В этом случае возможна как сходимость ряда, так и его расходимость. Примером тому служит обобщённый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$.

Теорема. (*радикальный признак Коши*). Пусть $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ (конечный или бесконечный).

Если $0 \leq l < 1$, то ряд сходится.

Если $l > 1$, то ряд расходится.

Замечание **.** Радикальный признак Коши также не даёт определённого ответа на вопрос о сходимости ряда в случае, когда $l = 1$.

Теорема (*признак Лейбница*). Если модули членов знакочередующегося ряда монотонно убывают, то ряд сходится.

Замечание. Из доказательства теоремы следует, что сумма S знакочередующегося ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, имеет знак первого члена ряда, и модуль этой суммы не превосходит модуля первого члена.

Модуль суммы остатка знакочередующегося ряда не превосходит модуля первого члена этого остатка.

2. Образцы задач с решениями

1)Решить, сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2 \cdot 3^{-n}$ абсолютно, условно или расходится.

Решение.

Образуем ряд из модулей членов данного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 3^{-n}$. Для решения вопроса о его сходимости применим к нему признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 3^{-(n+1)}}{n^2 3^{-n}}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{3}.$$ Так как $\frac{1}{3}<1$, то ряд сходится, следовательно данный ряд сходится абсолютно.

2)Решить, сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ абсолютно, условно или расходится.

Решение. По признаку Лейбница данный ряд сходится, так как он является знакочередующимся и модуль общего члена монотонно стремится к нулю. Теперь образуем ряд из модулей членов данного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Этот ряд является обобщенным гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ с показателем общего члена $k=\frac{1}{3}<1$. Такой ряд расходится, следовательно данный ряд сходится условно.

3)Решить, сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$ абсолютно, условно или расходится.

Решение. Рассмотрим модуль общего члена данного ряда:

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2\underset{n\to\infty}{\rightarrow}1.$$ Это означает, что общий член данного

ряда не стремится к нулю. Отсюда следует, что ряд расходится.

4) Решить, сходится ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\cos n}{\ln^n n}$ абсолютно, условно или расходится.

Решение. Образуем ряд из модулей членов данного ряда: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{|\cos n|}{\ln^n n}$.

Оценим члены полученного ряда сверху и построим мажорантный ряд: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^n n}$. К этому ряду применим радикальный признак Коши.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{\ln^n n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln n}=0<1$. Отсюда следует, что мажорантный ряд сходится. По признаку сравнения в форме неравенства следует, что минорантный ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{|\cos n|}{\ln^n n}$ тоже сходится. Тогда данный ряд сходится абсолютно.

3.Задачи для решения

Исследуйте, сходится ли ряд.

Укажите правильный вариант ответа: 1 - сходится абсолютно, 2 - сходится условно, 3 - ряд расходится.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\cdot 2^{-n}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^n}{n!}$.
3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\ln n}$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^2}$.
5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\ln n}$.
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n^2}{e^n}$.
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{n+3}$.
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^3}}$.
10. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\ln^n n}$.
11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{n+1}$.
12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}$.
13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n-\ln n}$.
14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{7n+5}$.
15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\alpha}{n^3}$.
16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n^4}{3^n}$.
17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{3n+2}{n+1}$.
18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{2n+1}{3n+2}\right)^n$.
19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$

.

$$20.\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln(n+2)}{n+4}.$$

Ответы.

1. 1.
2. 1.
3. 2.
4. 1.
5. 2.
6. 1.
7. 3.
8. 2.
9. 1.
10. 1.
11. 3.
12. 1.
13. 2.
14. 2.
15. 1.
16. 1.
17. 3.
18. 1.
19. 1.
20. 2.

4.Теоретические вопросы

1. Что такое сумма числового ряда?
2. Если числовой ряд сходится, то его остаток: 1) сходится , 2) расходится, 3) ничего нельзя сказать о сходимости или расходимости остатка?
3. Сформулируйте необходимое условие сходимости числового ряда.
4. Если общий член числового ряда стремится к нулю, то будет ли сходиться данный ряд?
5. К чему стремится n-й остаток сходящегося ряда при $n \to \infty$?
6. К чему стремится общий член a_n сходящегося ряда при $n \to \infty$?
7. Если общий член a_n ряда не стремится к нулю при $n \to \infty$, то данный ряд: 1) сходится , 2) расходится, 3) ничего нельзя сказать о сходимости или расходимости ряда?
8. Какой ряд называется абсолютно сходящимся?
9. Какой ряд называется условно сходящимся?
10. Какой ряд называется геометрическим (геометрической прогрессией)? При каком условии он сходится и чему равна его сумма?
11. Как оценивается по модулю остаток ряда, подчиняющегося условиям теоремы Лейбница?
12. Сформулируйте условие, при выполнении которого сумма ряда не меняется, если члены ряда произвольным образом поменять местами.
13. Сформулируйте необходимое и достаточное условие сходимости ряда (основной признак сходимости).
14. Оказывает ли влияние на сходимость ряда “отбрасывание” его первых “n” членов?
15. Какие арифметические действия можно производить над сходящимися рядами?
16. В чем состоит сочетательное свойство сходящихся рядов?
17. Можно ли переставлять местами члены условно сходящегося ряда?
18. Какой ряд называется знакопеременным?
19. Что понимается под “n”–ым остатком R_n ряда ?

20. Что можно сказать о сходимости ряда если $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$?
21. Сформулируйте предельный признак сравнения положительных рядов.
22. Сформулируйте признак Даламбера сходимости ряда.
23. Сформулируйте радикальный признак Коши сходимости ряда.
24. Сформулируйте интегральный признак Коши сходимости ряда.
25. Что такое гармонический ряд? Сходится он или расходится?
26. Сформулируйте признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда.
27. Какой ряд называется обобщенным гармоническим? Когда он сходится?
28. Если отношение последующего члена ряда к предыдущему стремится к нулю при $n\to\infty$, то будет ли данный ряд сходящимся?
29. Приведите пример сходящегося обобщенного гармонического ряда.
30. Приведите пример расходящегося обобщенного гармонического ряда.
31. Если минорантный ряд сходится, то будет ли сходиться мажорантный ряд при применении признака сравнения рядов с положительными членами?
32. Если минорантный ряд расходится, то будет ли сходиться мажорантный ряд при применении признака сравнения рядов с положительными членами?
33. Можно ли высказать заключение о расходимости положительного ряда в случае, когда $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 1$?
34. Если для положительных рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ выполняется соотношение (эквивалентности) $a_n \sim b_n$, то что можно утверждать о сходимости или расходимости этих рядов ?
35. Сформулируйте признак сравнения положительных рядов в конечной форме.