Вычисление потенциала потенциального поля

1. Определения, теоремы и формулы для решения задач

Определение 1. Потенциальным полем называется векторное поле, в каждой точке которого ротор равен нулю.

Определение 2. Потенциалом потенциального поля $\overline{a}(x, y, z)$ называется скалярная функция $U(x, y, z)$, частные производные которой равны координатам поля: $\frac{\partial U}{\partial x} = a_x(x, y, z); \frac{\partial U}{\partial y} = a_y(x, y, z); \frac{\partial U}{\partial z} = a_z(x, y, z)$.

Потенциал поверхностно односвязного потенциального поля можно найти по формуле

$$U(x, y, z) = U(x_0, y_0, z_0) + \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} a_x dx + a_y dy + a_z dz.$$

Здесь криволинейный интеграл 2-го рода не зависит от пути, а зависит лишь от начальной и конечной точек пути.

В частности его можно найти по более простой формуле, взяв в качестве пути интегрирования ломаную, со звеньями, параллельными координатным осям:

$$U(x, y, z) = U(x_0, y_0, z_0) +$$
$$+\int_{x_0}^{x} a_x(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} a_y(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^{z} a_y(x, y, z)dz.$$

Если потенциальное поле является силовым то работа такого поля вдоль пути равна разности потенциалов в начальной и конечной точках пути: .

$$W = \int_A^B a_x dx + a_y dy + a_z dz = U(B) - U(A)$$

2. Образец задачи с решением

Дано векторное поле .

$$\bar{b} = (2xy^2z^2 + y^2)\,\bar{i} + (2x^2yz^2 + 2xy)\,\bar{j} + (2x^2y^2z + 3z^2)\,\bar{k}$$

Требуется:

1) Проверить потенциальность поля $\bar{b}$. Для этого убедиться, что

$rot\bar{b} = 0$.

2) Вычислить его потенциал U по формуле

U= .

$$\int_0^x b_x(x,0,0)dx + \int_0^y b_y(x,y,0)dy + \int_0^z b_z(x,y,z)dz$$

3) Проверить безошибочность нахождения потенциала с помощью формул

$$U'_x = b_x; U'_y = b_y; U'_z = b_z.$$

4) Вычислить с помощью потенциала U работу W сил поля по перемещению материальной точки из точки O(0,0,0) в точку M(1,1,1).Убедиться, что ответ W=3
(контрольное число).

Решение.
1) Проверяем потенциальность поля $\bar{b}$. Для этого следует убедиться, что ротор поля равен нулю.

$$rot\overline{b}=\left(\frac{\partial b_z}{\partial y}-\frac{\partial b_y}{\partial z}\right)\overline{i}+\left(\frac{\partial b_x}{\partial z}-\frac{\partial b_z}{\partial x}\right)\overline{j}+\left(\frac{\partial b_y}{\partial x}-\frac{\partial b_x}{\partial y}\right)\overline{k}=$$

$$=\left(4x^2yz-4x^2yz\right)\overline{i}+\left(4xy^2z-4xy^2z\right)\overline{k}+\left(4xyz^2-4xyz^2\right)\overline{k}\equiv 0.$$

2) Вычисляем потенциал U поля $\overline{b}$ по формуле

$$U=\int_0^x b_x2(x,0,0)\,dx+\int_0^y b_y(x,y,0)\,dy+\int_0^z b_z(x,y,z)dz=$$

$$=\int_0^x 0dx+\int_0^y 2xydy+\int_0^z\left(2x^2y^2z+3z^2\right)dz=xy^2+x^2y^2z^2+z^3.$$

3) Проверяем истинность найденного потенциала.

$$U'_x=y^2+2xy^2z^2=b_x;U'_y=2xy+2x^2yz^2=b_y;U'_z=2x^2y^2z+3z^2=b_z.$$

Ответ:

$$U=xy^2+x^2y^2z^2+z^3.$$

4) Находим работу сил поля при перемещении материальной точки из точки O(0,0,0) в точку M(1,1,1) по формуле W = U(1,1,1) – U(0,0,0) = 3 – 0 = 3.

Ответ: W = 3.

3. Задачи для решения

1. $\overline{b}=\left(y^2z^3+5x^4\right)\overline{i}+\left(2xyz^3+4y^3z\right)\overline{j}+\left(3xy^2z^2+y^4\right)\overline{k}.$

2. $\overline{b}=\left(2xyz^3+y^2\right)\overline{i}+\left(x^2z^3+2xy\right)\overline{j}+\left(3x^2yz^2+5z^4\right)\overline{k}.$

3. $\overline{b}=\left(y^3z^2+2xy\right)\overline{i}+\left(3xy^2z^2+x^2\right)\overline{j}+\left(2xy^3z+4z^3\right)\overline{k}.$

4. $\overline{b}=\left(3x^2yz^2+4x^3\right)\overline{i}+\left(x^3z^2+z^2\right)\overline{j}+\left(2x^3yz+2yz\right)\overline{k}.$

5. $\overline{b}=\left(2xy^3z+y\right)\overline{i}+\left(3x^2y^2z+x\right)\overline{j}+\left(x^2y^3+4z^3\right)\overline{k}.$

6. $\overline{b}=\left(2xy^2z^3+4x^3z\right)\overline{i}+\left(2x^2yz^3+3y^2\right)\overline{j}+\left(3x^2y^2z^2+x^4\right)\overline{k}.$

7.
$$\overline{b} = \left(2xyz^3 + 3x^2 \right) \overline{i} + \left(x^2z^3 + 2yz^3 \right) \overline{j} + \left(3x^2yz^2 + 3y^2z^2 \right) \overline{k}.$$

8.
$$\overline{b} = \left(2xy^4z + y^2 \right) \overline{i} + \left(4x^2y^3z + 2xy \right) \overline{j} + \left(x^2y^4 + 3z^2 \right) \overline{k}.$$

9.
$$\overline{b} = \left(y^3z^4 + 2xy \right) \overline{i} + \left(3xy^2z^4 + x^2 \right) \overline{j} + \left(4xy^3z^3 + 2z \right) \overline{k}.$$

10.
$$\overline{b} = \left(yz + 2xy^3 \right) \overline{i} + \left(xz + 3x^2y^2 \right) \overline{j} + \left(xy + 4z^3 \right) \overline{k}.$$

11.
$$\overline{b} = \left(2xy^2z^2 + y \right) \overline{i} + \left(2x^2yz^2 + x \right) \overline{j} + \left(2x^2y^2z + 3z^2 \right) \overline{k}.$$

12.
$$\overline{b} = \left(3x^2y^2z + y^2 \right) \overline{i} + \left(2x^3yz + 2xy \right) \overline{j} + \left(x^3y^2 + 4z^3 \right) \overline{k}.$$

Ответы.

1. $U = x^5 + xy^2z^3 + y^4z.$
2. $U = xy^2 + x^2yz^3 + z^5.$
3. $U = x^2 + xy^3z^2 + z^4.$
4. $U = x^4 + x^3yz^2 + yz^2.$
5. $U = xy + x^2y^3z + z^4.$
6. $U = y^3 + x^2y^2z^3 + x^4z$
7. $U = x^3 + x^2yz^3 + y^2z^3$
8. $U = xy^2 + x^2y^4z + z^3.$
9. $U = x^2y + xy^3z^4 + z^2$
10. $U = x^2y^3 + xyz + z^4.$
11. $U = xy + x^2y^2z^2 + z^3$
12. $U = xy^2 + x^3y^2z + z^4.$

13.

4. Теоретические вопросы

14. 1.Что такое потенциал потенциального поля?

15. 2.Как вычисляется потенциал потенциального поля в поверхностно односвязной области?

16. 3.Как с помощью потенциала вычисляется работа потенциального силового поля вдоль незамкнутой кривой?

17. 4.Запишите уравнение Лапласа.

18. 5. Как связаны потенциал потенциального поля и уравнение Лапласа?

19. 6. Запишите уравнение Лапласа через оператор Лапласа.

20. 7. Запишите уравнение Лапласа через оператор Гамильтона.

21.