Вычисление потока векторного поля через поверхность с помощью поверхностного интеграла 2-го рода

1. Определения и формулы для решения задач

Определение 1. В произвольном (непрерывном) векторном поле $\vec{a}(M)$, заданном в области *G*, *потоком* векторного поля $\vec{a}(M)$ через поверхность (*S*) в направлении нормали $\vec{n}$ называется поверхностный интеграл

$$P = \iint\limits_{(S)} \vec{a}_n(M)\,dS = \iint\limits_{(S)} \vec{a}(M)\vec{n}_0(M)\,dS = \iint\limits_{(S)} (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma)\,dS, \quad (1)$$

где $(S) \subset G$ – кусочно-гладкая поверхность.

Замечание 1. Для потока вектора (векторного поля) употребляются и другие обозначения:

$$\iint\limits_{(S)} \vec{a} \times d\vec{S}, \quad \iint\limits_{(S)} a_n dS,$$

здесь $d\vec{S} = \vec{n}_0 dS$, a_n – “нормальная составляющая” вектора $\vec{a}$, т.е. $\text{пр}_{\vec{n}}\,\vec{a}$.

Если вектор-функция $\vec{a}(M)$ трактуется как скорость истечения жидкости, то из вышесказанного следует, что поток вектора $\vec{a}(M)$ даёт количество жидкости, протекающей через поверхность (*S*) за единицу времени.

Поток вектора $\vec{a}(M)$ через поверхность (*S*) можно выразить через поверхностный интеграл 2-го рода:

$$P = \iint\limits_{(S)} a_x dydz + a_y dxdz + a_z dxdy. \quad (1)$$

2. Образец задачи с решением

Даны поверхность S - часть единичной сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, лежащая в первом октанте ($x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$) , и векторное поле

$$\overline{a} = (z + xy)\,\overline{i} + (x + yz)\,\overline{j} + (y + zx)\,\overline{k}\,.$$

Требуется вычислить поток P поля $\overline{a}$ через поверхность S в направлении внешней нормали для сферы непосредственно с помощью поверхностного интеграла 2-го рода.

Решение.

$$P = \iint_S (z + xy)\,dydz + (x + yz)dzdx + (y + zx)\,dxdy = 3\iint_S (y + zx)dxdy$$

вследствие симметрии поля и поверхности S.

Сведем поверхностный интеграл к двойному по области S_{xy}, являющейся проекцией поверхности S на плоскость xOy.

Перейдем к полярным координатам.

$$P = 3\iint_{S_{xy}} \left(y + x\sqrt{1 - x^2 - y^2} \right) dxdy.$$

$$P = 3\int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^1 \left(r\sin\phi + \sqrt{1 - r^2}\, r\cos\phi \right) rdr =$$

$$= 3 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin\phi\, d\phi \int_0^1 r^2 dr + 3\int_0^{\pi/2} \cos\phi\, d\phi \int_0^1 r^2\sqrt{1 - r^2}\, dr = 3\frac{1}{3} + 3\int_0^1 r^2\sqrt{1 - r^2}\, dr.$$

В последнем интеграле делаем подстановку r = sint . Тогда

$$P = 1 + 3\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\cos^2 t\, dt = 1 + \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2t\, dt = 1 + \frac{3}{8}\int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t)dt = 1 + \frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{3\pi}{16}.$$

Ответ:

$$P = 1 + \frac{3\pi}{16}.$$

3.Задачи для решения

Даны поверхность S - часть единичной сферы $x^2+y^2+z^2=1$, лежащая в первом октанте (x $\geq$ 0,y $\geq$ 0, z $\geq$ 0) , и векторное поле . Требуется вычислить поток P поля $\overline{a}$ через поверхность S в направлении внешней нормали для сферы непосредственно с помощью поверхностного интеграла 2-го рода.

1. $\overline{a} = yz\overline{i} + xz\overline{j} + xy\overline{k}.$
2. $\overline{a} = xy\overline{i} + yz\overline{j} + xz\overline{k}.$
3. $\overline{a} = xz\overline{i} + xy\overline{j} + yz\overline{k}.$
4. $\overline{a} = x^2\overline{i} + y^2\overline{j} + z^2\overline{k}.$
5. $\overline{a} = y^2\overline{i} + z^2\overline{j} + x^2\overline{k}.$
6. $\overline{a} = z^2\overline{i} + x^2\overline{j} + y^2\overline{k}.$
7. $\overline{a} = x^3\overline{i} + y^3\overline{j} + z^3\overline{k}.$
8. $\overline{a} = y^3\overline{i} + z^3\overline{j} + x^3\overline{k}.$
9. $\overline{a} = z^3\overline{i} + x^3\overline{j} + y^3\overline{k}.$
10. $\overline{a} = xy^2\overline{i} + yz^2\overline{j} + zx^2\overline{k}.$
11. $\overline{a} = x^2y\overline{i} + y^2z\overline{j} + z^2x\overline{k}.$
12. $\overline{a} = yz^2\overline{i} + zx^2\overline{j} + xy^2\overline{k}.$

Ответы

1. $P = 3/8.$
2. $P = 3\pi/16.$
3. $P = 3\pi/16.$
4. $P = 3\pi/8.$
5. $P = 3\pi/16.$
6. $P = 3\pi/16.$
7. $P = 3\pi/10.$
8. $P = 2/5.$
9. $P = 2/5.$
10. $P = \pi/10.$
11. $P = 2/5.$
12. $P = 1/5.$
13.

3.
4.
5.

1. **Теоретические вопросы**

6. 1.Что такое поток векторного поля?
7. 2. Как выражается поток векторного поля через поверхностный интеграл 2-го рода?
8. 3. Как выражается поток векторного поля через поверхностный интеграл 1-го рода?
9. 4. Запишите выражение потока векторного поля через нормальную составляющую векторного поля по отношению к поверхности S, через которую проходит поток.
10. 5. Запишите выражение для потока плоского векторного поля $\vec{a}(x, y,)$ через границу l, ограничивающую некоторую область G.
11. 6. Укажите физический смысл потока поля скоростей текущей жидкости.
12. 7. Если поле является соленоидальным, то каким будет его поток через замкнутую поверхность?
13.