Вычисление потока векторного поля через замкнутую поверхность с помощью формулы Гаусса-Остроградского

1. Формулы для решения задач

Теорема Остроградского – Гаусса. Поток векторного поля через замкнутую поверхность в направлении внешней нормали равен тройному интегралу от дивергенции поля, взятому по области, ограниченной этой поверхностью.

Ь Приведем несколько формул, выражающих эту терему. Все эти формулы называются формулами Остроградского-Гаусса.

$$\iint\limits_{(S)} (a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma)\,dS = \iiint\limits_{G_1}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dV$$

$$\iint\limits_{(S)} (a_x\,dydz + a_y\,dzdx + a_z\,dxdy)\,dS = \iiint\limits_{G_1}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dV$$

$$\iint\limits_{(S)} \vec{a}\times\vec{n}_0\,dS = \iiint\limits_{G}\mathrm{div}\vec{a}\,dV$$

2.Образец задачи с решением

Дана поверхность S - часть единичной сферы $x^2+y^2+z^2=1$, лежащая в первом октанте ($x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$) , и векторное поле

$$\bar{a}=(z+xy)\,\bar{i}+(x+yz)\,\bar{j}+(y+zx)\,\bar{k}.$$

Вычислить поток P поля $\bar{a}$ через поверхность S в направлении внешней нормали для сферы, по формуле Гаусса-Остроградского, замкнув поверхность S частями координатных плоскостей.

Решение.

Замыкаем поверхность S поверхностями S_{xy}, S_{yz}, S_{xz}, являющихся частями координатных плоскостей, до замкнутой поверхности S_c. Тогда $S_c = S \cup S_{xy} \cup S_{yz} \cup S_{xz}$.

Пусть T – тело, ограниченное поверхностью S_c, а P_c - поток поля $\overline{a}$ через S_c в направлении внешней нормали.

$$P_c = \iiint\limits_T div\overline{a}dv = \iiint\limits_T (x+y+z)dv = 3\iiint\limits_T xdxdydz.$$

Перейдем к сферическим координатам по формулам $x = \rho\cos\psi\cos\phi; y = \rho\cos\psi\sin\phi; z = \rho\sin\psi; J = \rho^2\cos\psi.$ Тогда

$$P_c = 3\int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{\pi/2} d\psi \int_0^1 \rho\cos\psi\cos\phi\rho^2\cos\psi d\rho = 3\int_0^{\pi/2}\cos\phi d\phi \int_0^{\pi/2}\cos^2\psi d\psi \int_0^1 \rho^3 d\rho = 3\cdot 1\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3\pi}{16}.$$

$P = P_c - P_{xy} - P_{yz} - P_{xz}$,где P_{xy}, P_{yz}, P_{xz} - потоки поля $\overline{a}$ через поверхности S_{xy}, S_{yz}, S_{xz} соответственно. В силу симметрии поля $\overline{a}$ и поверхности S_c по отношению к переменным x,y,z имеем $P_{xy} = P_{yz} = P_{xz}.$

$$P_{xy} = \iint\limits_{S_{xy}} (z+xy)dydz + (x+yz)dzdx + (y+zx)dxdy.$$

На поверхности S_{xy} имеем z=0 и dz=0, поэтому $P_{xy} = \iint\limits_{S_{xy}} ydxdy.$ Этот интеграл взят по стороне поверхности S_{xy} ,нормаль к которой составляет угол π с осью Oz.

Сведем поверхностный интеграл к двойному по S_{xy}, изменив направление нормали на противоположное, и перейдем к полярным координатам по

Формулам $x = r\cos\phi;\ y = r\sin\phi;\ J = r.$ Тогда

$$P_{xy} = -\int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^1 r\sin\phi\, r dr = -\int_0^{\pi/2} \sin\phi\, d\phi \int_0^1 r^2 dr = -1\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Поэтому

$$P = \frac{3\pi}{16} - 3\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{3\pi}{16} + 1.$$

3.Задачи для решения

Дана поверхность S - часть единичной сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, лежащая в первом октанте (x $\geq$ 0,y $\geq$ 0, z $\geq$ 0) , и векторное поле. Вычислить поток P поля $\overline{a}$ через поверхность S в направлении внешней нормали для сферы, по формуле Гаусса-Остроградского, замкнув поверхность S частями координатных плоскостей.

1. $\overline{a} = yz\overline{i} + xz\overline{j} + xy\overline{k}.$

2. $\overline{a} = xy\overline{i} + yz\overline{j} + xz\overline{k}.$

3. $\overline{a} = xz\overline{i} + xy\overline{j} + yz\overline{k}.$

4. $\overline{a} = x^2\overline{i} + y^2\overline{j} + z^2\overline{k}.$

5. $\overline{a} = y^2\overline{i} + z^2\overline{j} + x^2\overline{k}.$

6. $\overline{a} = z^2\overline{i} + x^2\overline{j} + y^2\overline{k}.$

7. $\overline{a} = x^3\overline{i} + y^3\overline{j} + z^3\overline{k}.$

8. $\overline{a} = y^3\overline{i} + z^3\overline{j} + x^3\overline{k}.$

9. $\overline{a} = z^3\overline{i} + x^3\overline{j} + y^3\overline{k}.$

10. $\overline{a} = xy^2\overline{i} + yz^2\overline{j} + zx^2\overline{k}.$

11. $\overline{a} = x^2y\overline{i} + y^2z\overline{j} + z^2x\overline{k}.$

12. $\overline{a} = yz^2\overline{i} + zx^2\overline{j} + xy^2\overline{k}.$

Ответы.

1. $P = 3/8.$
2. 2. $P = 3\pi/16.$
3. 3. $P = 3\pi/16.$
4. 4. $P = 3\pi/8.$
5. 5. $P = 3\pi/16.$
6. 6. $P = 3\pi/16.$
7. 7. $P = 3\pi/10.$
8. 8. $P = 2/5.$
9. 9. $P = 2/5.$
10. 10. $P = \pi/10.$
11. 11. $P = 2/5.$

12. 12.

$P = 1/5$.

13.

14. 4.Теоретические вопросы

15.1. Что такое дивергенция векторного поля?

16.2. Сформулируйте теорему Остроградского-Гаусса.

17.3. Напишите формулу Остроградского-Гаусса с поверхностным интегралом 2-го рода.

18.4. Напишите формулу Остроградского-Гаусса с поверхностным интегралом 1-го рода.

19.5. Напишите формулу Остроградского-Гаусса в векторной форме с использованием понятий дивергенции и нормальной составляющей векторного поля к поверхности.

20.