## Поверхностные интегралы

### 1. Определения и формулы для решения задач

*Обозначение и вычисление поверхностного интеграла 1-го рода*

Поверхностный интеграл 1-го рода обозначается символом

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\,dS$$

Пусть гладкая поверхность ($S$) задана уравнением $z = \phi(x,y)$, $D$ – её проекция на плоскость $Oxy$, а поверхность ($S$) такова, что прямая, проходящая через любую точку области $D$ перпендикулярно плоскости $Oxy$, пересекает поверхность ($S$) в одной точке. Предположим далее, что на поверхности ($S$) задана функция $f(x,y,z)$, непрерывная в любой точке этой поверхности. В этих предположениях справедлива следующая формула:

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{D} f\left(x,y,\varphi(x,y)\right)\sqrt{1+\varphi_x'^2(x,y)+\varphi_y'^2(x,y)}\;dx\,dy$$, или

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{D} f\left(x,y,\varphi(x,y)\right)\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\;dx\,dy. \qquad (1)$$

*Определение и вычисление поверхностно интеграла 2-го рода*

Пусть ($S$) – гладкая поверхность, заданная уравнением: $z = f(x,y)$, а $D_{xy}$ – проекция ($S$) на плоскость $Oxy$ (рис. 1). Положим, что прямые, параллельные оси $Oz$, пересекают эту поверхность только в одной точке. Функция $f(x,y)$ непрерывна на $D_{xy}$ вместе со своими частными производными, поэтому в каждой точке поверхности ($S$) существует нормаль и ей можно придать два направления – одно вверх, другое вниз (рис. 1). В соответствии с этим у поверхности ($S$) можно различать *две стороны – верхнюю и нижнюю*.

Пусть на поверхности ($S$) задана непрерывная функция $R(x,y,z)$.

Рассмотрим интеграл:

$$\iint\limits_{(S)} R(x,y,z)\cos(\vec{n},z)\,dS, \qquad (2)$$

где $\cos(\vec{n},z)$ – косинус угла, который составляет нормаль к выбранной стороне поверхности с осью $Oz$.

Величина этого интеграла зависит от выбора направления нормали или, что то же самое, от выбора стороны поверхности, по которой ведётся интегрирование. При интегрировании по верхней стороне $\cos(\vec{n},z) > 0$ и $\cos(\vec{n},z)\,dS = dS_{xy}$; при интегрировании по нижней стороне $\cos(\vec{n},z) < 0$ и $\cos(\vec{n},z)\,dS = -dS_{xy}$, где $dS_{xy}$ – площадь проекции элемента поверхности ($dS$) на плоскость $Oxy$ (рис.1).

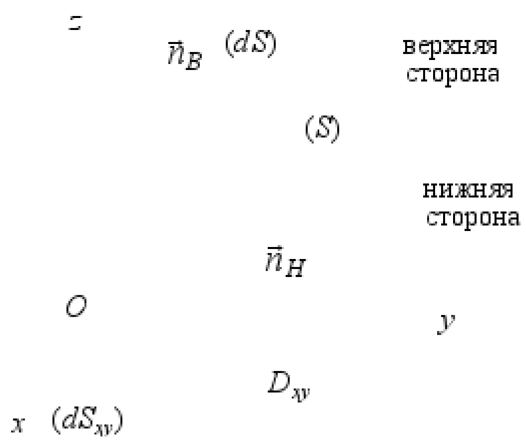


Рис. 1 К определению поверхностного интеграла 2-го рода

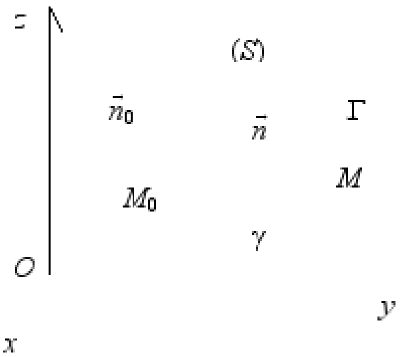


Рис. 2. Двусторонняя поверхность

В рассматриваемой прямоугольной системе координат $dS_{xy}=dxdy$, поэтому интеграл (2) принято обозначать также следующим символом: $\iint\limits_{(S)} R(x,y,z)\,dxdy$ и называть *поверхностным интегралом 2-го рода*. При этом следует иметь в виду, что этот интеграл рассматривается на выбранной стороне поверхности ($S$) и меняет знак при переходе на другую сторону этой поверхности. Итак, имеем равенство:

$$\iint\limits_{(S)} R(x,y,z)\cos(\vec{n},z)\,dS = \iint\limits_{(S)} R(x,y,z)\,dxdy. \qquad (3)$$

Так как $z=f(x,y)$ на поверхности ($S$), то

$$\vec{n}=\pm(z'_x, z'_y, -1), \quad \cos(\vec{n},z)=\pm 1\Big/\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y},$$

и в силу формулы (1) получаем:

$$\iint\limits_{(S)} R(x,y,z)\,dxdy = \pm\iint\limits_{D_{xy}} R\big(x,y,f(x,y)\big)\,dxdy. \qquad (4)$$

В формуле (4) берётся знак “+”, если $\cos(\vec{n},z)>0$, т.е. нормаль $\vec{n}$ составляет острый угол с осью $Oz$, и “–” в противном случае.

## 2. Образцы задач с решениями

1. Найти момент инерции части поверхности конуса (К) $4z^2=x^2+y^2$,

$0 \le z \le H$, относительно оси $Oz$, если поверхностная плотность $\mu = (x^2 + y^2)^{3/2}$.

*Решение.*

Предварительно сделаем чертёж (рис. 3).

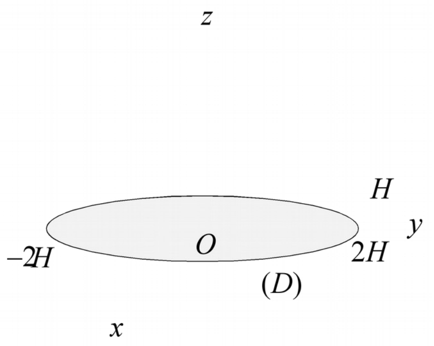


Рис. 3. Конус (К)

Спроектируем поверхность на плоскость $Oxy$, проекция – круг с центром в начале координат радиуса $2H$ (область $D$). Момент инерции конуса относительно оси Oz выражается поверхностным интегралом 1-го рода $I_z = \iint\limits_{(S)} (x^2 + y^2)(x^2 + y^2)^{3/2} dS$. Вычислим его.

Найдём $z$ из уравнения конуса: $z = \sqrt{x^2 + y^2} \big/ 2$,

$1 + z_x'^2 + z_y'^2 = 1 + \dfrac{x^2}{4(x^2 + y^2)} + \dfrac{y^2}{4(x^2 + y^2)} = \dfrac{5(x^2 + y^2)}{4(x^2 + y^2)} = \dfrac{5}{4}$. Из формулы (1) следует равенство:

$$I_z = \iint\limits_D (x^2 + y^2)^{5/2} \frac{\sqrt{5}}{2} dxdy. \qquad (5)$$

Переходя в этом двойном интеграле к полярным координатам, получаем окончательный результат:

$$I_z=\iint\limits_D \frac{\sqrt{5}}{2} r^6 dr d\varphi = \frac{\sqrt{5}}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2H} r^6 dr = \frac{128\sqrt{5}}{7}\pi H^7.$$

2. Вычислить поверхностный интеграл 2-го рода $I=\iint\limits_{(S)} z^2 dxdy$ по нижней стороне поверхности конуса $x^2+y^2=z^2$, $0\le z\le 1$.

*Решение.*

На нижней стороне поверхности нормаль составляет с осью $Oz$ тупой угол, следовательно,

$$\iint\limits_{(S)} z^2 dxdy = -\iint\limits_D (x^2+y^2) dxdy = -\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^1 r^3 dr = -2\pi\cdot\frac{1}{4} = -\frac{\pi}{2},$$

здесь сделан переход к полярным координатам:

$x=r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$, якобиан $J=r$.

3.Вычислить поверхностный интеграл 2-го рода $I=\iint\limits_S xyzdxdy$ по верхней стороне поверхности треугольника с вершинами в точках $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ на координатных осях.

*Решение.* Составляем уравнение плоскости, на которой лежит треугольник *ABC*: $x+y+z=1$ и выражаем из него переменную *z*. $z=1-x-y$. Тогда изучаемый интеграл преобразуется к виду $I=\iint\limits_D xy(1-x-y)\,dxdy$. Получили двойной интеграл по проекции D треугольника *ABC* на плоскость *xOy.* Область D есть треугольник *AOB.* Составляем уравнение прямой *AB*: $x+y=1$.

Отсюда $y=1-x$. Тогда двойной интеграл сводится к следующему повторному

$$I=\int_0^3 xdx\int_0^{1-x} y(1-x-y)dy=$$

$$=\int_0^1 xdx\int_0^{1-x} ydy-\int_0^1 x^2dx\int_0^{1-x} ydy-\int_0^1 xdx\int_0^{1-x} y^2dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\,dx-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2(1-x)^2\,dx-\frac{1}{3}\int_0^1 x(1-x)^3\,dx.$$

Вычисляя все определенные интегралы, получим

$$I=\frac{1}{12}-\frac{1}{60}-\frac{1}{60}=\frac{1}{20}.$$

4.Вычислить поверхностный интеграл 2-го рода $P=\iint_S (y+zx)dxdy.$

Поверхность $S-$ это верхняя сторона части единичной сферы $x^2+y^2+z^2=1$, лежащей в первом октанте (x $\geq$ 0,y $\geq$ 0, z $\geq$ 0).

*Решение.*

Сведем поверхностный интеграл к двойному по области $S_{xy}$ – проекции поверхности $S$ на плоскость $xOy$.

$$P=\iint_S \left(y+x\sqrt{1-x^2-y^2}\right)dxdy.$$

Перейдем к полярным координатам.

$$P=\int_0^{\pi/2} d\varphi\int_0^1\left(r\sin\varphi+\sqrt{1-r^2}\,r\cos\varphi\right)rdr=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^2dr+\int_0^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\,dr=\frac{1}{3}+\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\,dr.$$

В последнем интеграле делаем подстановку $r = \sin t$ . Тогда

$$P=\frac{1}{3}+\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt=\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)\,dt=\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\times\frac{\pi}{2}=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{16}.$$

*Ответ*:

$$P=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{16}.$$

### 3. Задачи для решения

Вычислить поверхностный интеграл 2-го рода $\iint\limits_S f(x,y,z)\,dxdy$.

Поверхность $S -$ это верхняя сторона части единичной сферы $x^2+y^2+z^2=1$, лежащей в первом октанте ($x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$).

1. $f = xy;$
2. $f = xz.$
3. $f = yz.$
4. $f = z^2.$
5. $f = x^2.$
6. $f = y^2.$
7. $f = z^3.$
8. $f = x^3.$
9. $f = y^3.$
10. $f = zx^2.$
11. $f = z^2x.$
12. $f = xy^2.$

*Ответы.*

1. $1/8.$
2. $\pi/16.$
3. $\pi/16.$

4. $\pi/8$.

5. $\pi/16$.

6. $\pi/16$.

7. $\pi/10$.

8. 2/15.

9. 2/15.

10. $\pi/30$.

11. 2/15.

12. 1/15.

13.

**14.**

**15.**

**16.**

## 4. Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение поверхностного интеграла 1-го рода (по площади поверхности).
2. Запишите формулу сведения поверхностного интеграла 1-го рода к двойному.
3. Как выражается масса поверхности с поверхностной плотностью распределения массы $\delta(x, y, z)$ через поверхностный интеграл?
4. Запишите формулу Гаусса-Остроградского и объясните смысл величин , входящих в формулу.
5. Сформулируйте определение поверхностного интеграла 2-го рода

   $\iint\limits_{(S)} R(x, y, z)dxdz$.
6. Запишите формулу связи между поверхностными интегралами общего вида 1-го и 2-го рода. Объясните смысл величин, входящих в формулу.
7. Запишите формулу для вычисления поверхностного интеграла 2-го рода $\iint\limits_{(S)} R(x, y, z)dxdz$ через двойной интеграл в случае, когда поверхность $(S)$ задана уравнением $z = f(x, y)$.
8. Какая поверхность называется двухсторонней?

17. 9. Что происходит с поверхностными интегралами 1-го и 2-го
18. рода при изменении стороны поверхности интегрирования на
19. противоположную?

9. Запишите формулу Стокса и объясните смысл величин, входящих в формулу.
10. Какая трёхмерная область называется поверхностно

20. односвязной?
21. 11. Как в формуле Стокса согласуются направление обхода
22. замкнутого контура и выбор стороны поверхности?
23. 12.В чем заключается физический смысл поверхностного интеграла

**24.** 2-го рода?

25.