Вычисление среднего значения функции в области

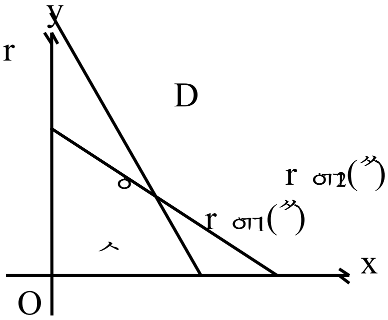
1. Формулы для решения задач

Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.

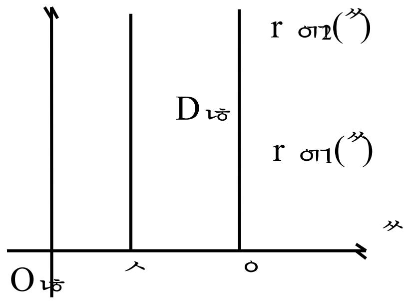
Пусть область D – обобщённый криволинейный сектор (рис. 1), ограниченный линиями, заданными полярными уравнениями: $\phi = \alpha$, $\phi = \beta$, $r = \psi_1(\phi)$, $r = \psi_2(\phi)$, $0 \le \alpha < \beta \le 2\pi$, $\psi_1(\phi) \le \psi_2(\phi)$, $\phi \in [\alpha, \beta]$. Области D на плоскости Oxy соответствует область D' на плоскости $O'\varphi r$ − область 1-го типа (рис.1). Поэтому, переходя к полярным координатам, получим:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,drd\varphi = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{\psi_1(\varphi)}^{\psi_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr.$$

Это соотношение сводит двойной интеграл по области D к повторному при переходе к полярным координатам без построения области D'.



y
r
D
x
O



D
O

Рис. 1. Обобщённый криволинейный сектор D и его образ D' на плоскости $O'\varphi r$

В подавляющем большинстве задач пределы интегрирования по r и φ определяются, исходя из вида области D и геометрического смысла полярных координат.

Замечание. Если D – более сложная область, чем на рис. 1, то, переходя к полярным координатам, её разбивают на части рассмотренного типа.

Определение. Средним значением функции в области D называется двойной интеграл от этой функции по области D, деленный на площадь области D.

2. Образец задачи с решением

1. Найти среднее значение функции $f(x,y) = \left(|x|+|y|\right)^2 \big/ a^2$ в круге $x^2 + y^2 \le a^2$.

Решение.

Согласно определению

$$f_{cp} = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \Big/ \iint\limits_D dxdy =$$

$$= \frac{1}{a^2}\iint\limits_D \left(|x|+|y|\right)^2 dxdy \Big/ \pi a^2 .$$

Полученный интеграл в силу симметрии можно вычислить по четверти круга, лежащей в первом квадранте, и результат учетверить. Применяем полярные координаты.

$$\frac{1}{a^2}\iint\limits_D \left(|x|+|y|\right)^2 dxdy = \frac{1}{a^2}\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{a}\left(r\cos\varphi + r\sin\varphi\right)^2 rdrd\varphi =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int\limits_0^{a} r^3 dr\left(\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2\varphi d\varphi + \int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi + \int\limits_0^{\pi/2}\sin^2\varphi d\varphi\right) =$$

$$=\frac{1}{a^2}\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^a\left(\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi+\frac{\sin^2\varphi}{2}\Bigg|_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi\right)=$$

$$=\frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a^2(\pi+1)}{8}.$$

Отсюда

$$f_{ср}=\frac{\pi+1}{8\pi}.$$

3. Задачи для решения

Найти среднее значение функции

2. $f(x,y)=(x^2+y^2)/a^2$ в круге $x^2+y^2\le a^2$.
3. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}/a$ в круге $x^2+y^2\le a^2$.
4. $f(x,y)=(x^2+y^2)^{3/2}/a^3$ в круге $x^2+y^2\le a^2$.
5. $f(x,y)=(x^2+y^2)^2/a^4$ в круге $x^2+y^2\le a^2$.
6. $f(x,y)=(x^2+y^2)^3/a^6$ в круге $x^2+y^2\le a^2$.
7. $f(x,y)=x^2/a^2$ в круге $x^2+y^2\le a^2$.
8. $f(x,y)=y^2/a^2$ в круге $x^2+y^2\le a^2$.
9. $f(x,y)=|x|/a$ в круге $x^2+y^2\le a^2$
10. $f(x,y)=|y|/a$ в круге $x^2+y^2\le a^2$.
11. $f(x,y)=(|x|+|y|)/a$ в круге $x^2+y^2\le a^2$.
12. $f(x,y)=|xy|/a^2$ в круге $x^2+y^2\le a^2$ $f(x,y)=|xy|/a^2$.
13. $f(x,y)=(x+y)/a$ в круге $x^2+y^2\le a^2$.

14. $f(x,y)=\left(\dfrac{x^2+y^2}{a^2}\right)^{1/5}$ в круге $x^2+y^2\le a^2$.

15. $f(x,y)=\left(\dfrac{x^2+y^2}{a^2}\right)^{1/3}$ в круге $x^2+y^2\le a^2$.

16. $f(x,y)=\left(\dfrac{x^2+y^2}{a^2}\right)^{2/3}$ в круге $x^2+y^2\le a^2$.

17. $f(x,y)=\left(\dfrac{x^2+y^2}{a^2}\right)^{2/5}$ в круге $x^2+y^2\le a^2$.

18. $f(x,y)=(x^2+y^2)/a^2$ в полукруге $x^2+y^2\le a^2$; $(y\ge 0)$.

19. $f(x,y)=(x^2+y^2)^2/a^4$ в полукруге $x^2+y^2\le a^2$; $(y\ge 0)$.

20. $f(x,y)=|x|/a$ в полукруге $x^2+y^2\le a^2$; $(y\ge 0)$.

21. $f(x,y)=y/a$ в полукруге $x^2+y^2\le a^2$; $(y\ge 0)$.

Ответы

1. 1/2.
2. 2/3.
3. 2/5.
4. 1/3.
5. 1/4.
6. 1/4.
7. 1/4.
8. $4/(3\pi)$.
9. $4/(3\pi)$.
10. $8/(3\pi)$.
11. $1/(2\pi)$.
12. 0.
13. 3/4.
14. 5/6.
15. 3/5.
16. 5/7.
17. 1/2.
18. 1/3.
19. $4/(3\pi)$.
20. $4/(3\pi)$.

21.

22.

4. Теоретические вопросы

1. Дайте определение среднего значения функции $f(x, y)$ в области D.
2. Как вычислить площадь области с помощью двойного интеграла в полярных координатах?
3. Запишите формулу перехода от декартовых координат к полярным в двойном интеграле
4. Запишите формулу расстановки пределов в двойном интеграле в случае полярных координат,когда область интегрирования задана неравенствами $4 \le x^2 + y^2 \le 9;\ x \ge 0;\ y \ge 0.$
5. Запишите формулу расстановки пределов в двойном интеграле в случае полярных координат, когда область интегрирования задана неравенствами $1 \le x^2 + y^2 \le 4$, $x \le 0$, $y \le 0$.
6. Что такое якобиан преобразования в случае перехода от декартовых координат к криво- линейным в двойном интеграле?
7. Запишите формулу расстановки пределов в двойном интеграле в случае полярных координат,когда область интегрирования задана неравенствами $x^2 + y^2 \le 4;\ 0 \le y \le x$.
8. Запишите формулу расстановки пределов в двойном интеграле в случае полярных координат, когда область интегрирования задана неравенствами $x^2 + y^2 \le 4;\ y \ge 0;$
9. Запишите формулу расстановки пределов в двойном интеграле в случае полярных координат, когда область интегрирования задана неравенствами $x^2 + y^2 \le 9;\ x \ge 0;$
10. Запишите формулу расстановки пределов в двойном интеграле в случае полярных координат, когда область интегрирования задана неравенствами $x^2 + y^2 \le 1$.
11. Как вычислить среднее значение функции $f(x, y)$ в области D с помощью двойного интеграла в полярных координатах?
12. Запишите формулу расстановки пределов в двойном интеграле в случае полярных координат, когда область интегрирования задана неравенствами $x^2 + y^2 \le 1$; $x \ge 0;\ y \ge 0$.

23.