## 2. Степенные ряды

### 1. Определения, теоремы и формулы для решения задач

**Определение.** Функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

называется *степенным рядом*, числа $a_n \in \boldsymbol{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ называются *коэффициентами* степенного ряда**.**

**Теорема.** (*теорема Абеля*). Если степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (1)$$

сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он сходится, и притом абсолютно, при любом $x$: $|x| < |x_0$

Если степенной ряд (3.3) расходится при $x = x_0$, то он расходится и при всяком $x$: $|x| > |x_0|$.

**Определение.**

Для степенного ряда (1) существует число $R > 0$, такое, что при $|x| < R$ ряд сходится и притом абсолютно, а при $|x| > R$ ряд расходится.

Число $R$ называется *радиусом сходимости* степенного ряда.

Интервал $(-R, R)$ называется *интервалом сходимости* степенного ряда.

***Замечание.*** Для ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

интервал сходимости имеет вид $(x_0-R, x_0+R)$.

На концах интервала сходимости ряд может или сходиться или расходиться. Здесь необходимо дополнительное исследование.

У некоторых рядов интервал сходимости вырождается в точку $(R = 0)$, а у других совпадает со всей осью $(R = \infty)$

**Теорема.** Если для коэффициентов степенного ряда существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = l \qquad (2)$$

конечный или бесконечный, то он равен радиусу сходимости ряда, т. е. $R = l.$

**Теорема.** Если для коэффициентов членов степенного ряда существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1} = l \qquad (3)$$

(конечный или бесконечный), то он равен радиусу сходимости ряда, т. е. $R = l.$

Степенной ряд можно почленно дифференцировать или интегрировать сколько угодно раз. Радиус сходимости полученного ряда равен радиусу сходимости исходного ряда. Сумма полученного ряда равна соответственно производным или интегралам от суммы исходного ряда.

## 1. Образцы задач с решениями

1. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n}$.

*Решение*.

Коэффициенты $a_n = 1/n \neq 0$. Чтобы определить радиус сходимости ряда, воспользуемся формулой (2)

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| = 1,$$

значит, ряд сходится абсолютно при $|x-2|<1$, т.е. при $x \in (1; 3)$. Выясним его поведение на концах интервала сходимости.

Пусть $x = 3$, получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3-2)^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Это расходящийся гармонический ряд, поэтому исходный степенной ряд расходится при $x = 3$.

Возьмём теперь $x = 1$, имеем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1-2)^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. Этот ряд является условно сходящимся, следовательно, исходный степенной ряд условно сходится при $x = 1$.

*Ответ:* ряд сходится абсолютно при $x \in (1; 3)$, сходится условно при $x = 1$, в остальных случаях ряд расходится.

2. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-2)^n$ .

*Решение.*

Поскольку $a_n = n! \neq 0$, воспользуемся формулой (2) для определения радиуса сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

следовательно, данный ряд сходится в единственной точке $x = 2$.

3.Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}$ .

*Решение.*

Используем формулу (2): $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$,

следовательно, ряд сходится при любых $x \in R$, его область сходимости интервал $(-\infty; +\infty)$.

4. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{2^n}$.

*Решение.*

В рассматриваемый ряд входят только члены с чётными степенями разности $(x - 2)$, следовательно, все нечётные коэффициенты ряда равны нулю. Это означает, что в данном случае нельзя пользоваться формулами (3.5), (3.6). Применим к данному ряду, например, радикальный признак Коши. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(x-2)^{2n}}{2^n}\right|} = \frac{(x-2)^2}{2},$$

то ряд будет абсолютно сходиться, если

$$\frac{(x-2)^2}{2} < 1 \quad \Rightarrow \quad |x-2| < \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad x \in (2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}).$$

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

Пусть $x = 2 \pm \sqrt{2}$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2 \pm \sqrt{2} - 2)^{2n}}{2^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 1$ расходится, так как его общий член не стремится к нулю. Таким образом, область сходимости ряда: $E = (2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$.

## 3.Задачи для решения

Найти область сходимости степенного ряда

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$.
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2}$.
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n}$.
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{3^n}$.
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!}$.
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.
11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}$.
12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$.
13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n5^n}$.
14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+2)^3}$.
15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{3n-1}$.
16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n7^n}$.
17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{n^2}$.
18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{3}\right)^n$.
19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3 x^{2n}}{3n+1}$.
20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+2)!}$.

## Ответы

1. ( -2; 2 ).
2. [ -1; 1).
3. [ -1;1].
4. ( -3; 3 ).
5. $(-\infty; \infty)$.
6. [ 0; 2 ].
7. ( 0; 4 ).
8. (- 4; 2 ).
9. $(-\infty; \infty)$.
10. [- 1; 1 ).
11. ( -5; 5 ).
12. ( - 1; 1 ).
13. [- 5; 5 ).
14. [ 0; 2 ].
15. [- 1; 1 ).
16. [- 4; 10 ).
17. [- 6; - 4 ].
18. (– 3; 3 ).
19. (- 1; 1).
20. $(-\infty; \infty)$.

## 4.Теоретические вопросы

1. Какой ряд называется степенным?

2. Степенной ряд по степеням $x - x_0$ имеет радиус сходимости $R$. Укажите, сходится или расходится ряд в точке $x_0 + 2R$.
3. Сформулируйте первую теорему Абеля о степенных рядах.
4. Степенной ряд по степеням $x$ сходится в точке $x_0$ и расходится в точке $(-x_0)$. Чему равен радиус сходимости этого ряда?
5. Что представляет собой область сходимости степенного ряда?
6. Напишите формулы для вычисления радиуса сходимости степенного ряда.
7. В какой области степенной ряд сходится абсолютно ?
8. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ с радиусом сходимости R проинтегрирован почленно на промежутке $[0, x]$. Чему равен радиус сходимости полученного ряда?
9. В какой области степенной ряд может быть проинтегрирован почленно?
10. Можно ли сделать утверждение о непрерывности суммы степенного ряда внутри интервала сходимости и на его концах?
11. Можно ли почленно дифференцировать степенной ряд внутри интервала сходимости ( - R, R )?
12. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_o)^n$ с радиусом сходимости R продифференцирован почленно. Укажите интервал сходимости полученного ряда.