Индивидуальные расчетные задания по теории поля

Целевая установка

Раздел «Теория поля» является одним из заключительных разделов курса математики. Изучается на втором курсе вуза после изучения дифференциальных уравнений, кратных и криволинейных интегралов.

Контроль усвоения этой темы нецелесообразно проводить с помощью контрольной аудиторной работы, так как решение многих задач связано с громоздкими выкладками. Методически более оправданным является выполнение студентами индивидуального расчетного задания, которое охватывает все важнейшие понятия.

Для облегчения труда преподавателей и студентов задание унифицировано. Всем предложены одна и та же поверхность S и одни и те же вопросы для решения. Разница – в задании полей.

Проверяется знание дифференциальных и интегральных характеристик поля
(дивергенция, ротор, поток, циркуляция, потенциал, работа). При отыскании интегралов поднимается тема перехода к полярным и сферическим координатам.
Есть ответы (для преподавателей) и решение образца.

Содержание задания

Даны поверхность S - часть единичной сферы $x^2+y^2+z^2=1$, лежащая в первом октанте ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$), и два векторных поля

$\bar{a}=(z+xy)\,\bar{i}+(x+yz)\,\bar{j}+(y+zx)\,\bar{k}$ (образец),

$\bar{b}=(2xy^2z^2+y^2)\,\bar{i}+(2x^2yz^2+2xy)\,\bar{j}+(2x^2y^2z+3z^2)\,\bar{k}$ (образец).

Требуется:

1.Определить класс поля $\bar{a}$.

2.Вычислить поток P поля $\bar{a}$ через поверхность S в направлении внешней нормали для сферы двумя способами.

2.1.По формуле Гаусса-Остроградского, замкнув поверхность S частями координатных плоскостей.

2.2.Непосредственно с помощью поверхностного интеграла.

3. Вычислить циркуляцию С поля $\overline{a}$ по контуру поверхности S в положительном направлении со стороны внешней нормали двумя способами.

3.1.По формуле Стокса.

3.2.Непосредственно с помощью криволинейного интеграла.

4. Изучить поле $\overline{b}$.

4.1. Проверить потенциальность поля $\overline{b}$. Для этого убедиться, что $rot\overline{b} = 0$.

4.2.Вычислить его потенциал U по формуле

$$U=\int_0^x b_x(x,0,0)dx + \int_0^y b_y(x,y,0)dy + \int_0^z b_z(x,y,z)dz.$$

4.3.Проверить безошибочность нахождения потенциала с помощью формул

$$U'_x = b_x; U'_y = b_y; U'_z = b_z.$$

4.4.Вычислить с помощью потенциала U работу W сил поля по перемещению материальной точки из точки O(0,0,0) в точку M(1,1,1).Убедиться, что ответ W=3 (контрольное число).

Указание.1. Можно упростить вычисление интегралов для нахождения потока и циркуляции поля $\overline{a}$, если учесть симметричность поверхности S и поля.

2.Работа по выполнению задания – самопроверяемая, так как величины P и C вычисляются двумя способами, а вычисление потенциала контролируется пунктами 4.2. и 4.3.

Варианты индивидуального задания по теории поля

1. $\overline{a} = yz\overline{i} + xz\overline{j} + xy\overline{k}; \overline{b} = \left(y^2z^3 + 5x^4\right)\overline{i} + \left(2xyz^3 + 4y^3z\right)\overline{j} + \left(3xy^2z^2 + y^4\right)\overline{k}.$

2. $\overline{a} = xy\overline{i} + yz\overline{j} + xz\overline{k}; \overline{b} = \left(2xyz^3 + y^2\right)\overline{i} + \left(x^2z^3 + 2xy\right)\overline{j} + \left(3x^2yz^2 + 5z^4\right)\overline{k}.$

3.
$\overline{a} = xz\overline{i} + xy\overline{j} + yz\overline{k}; \overline{b} = \left(y^3z^2 + 2xy\right)\overline{i} + \left(3xy^2z^2 + x^2\right)\overline{j} + \left(2xy^3z + 4z^3\right)\overline{k}.$

4.
$\overline{a} = x^2\overline{i} + y^2\overline{j} + z^2\overline{k}; \overline{b} = \left(3x^2yz^2 + 4x^3\right)\overline{i} + \left(x^3z^2 + z^2\right)\overline{j} + \left(2x^3yz + 2yz\right)\overline{k}.$

5.
$\overline{a} = y^2\overline{i} + z^2\overline{j} + x^2\overline{k}; \overline{b} = \left(2xy^3z + y\right)\overline{i} + \left(3x^2y^2z + x\right)\overline{j} + \left(x^2y^3 + 4z^3\right)\overline{k}.$

6.
$\overline{a} = z^2\overline{i} + x^2\overline{j} + y^2\overline{k}; \overline{b} = \left(2xy^2z^3 + 4x^3z\right)\overline{i} + \left(2x^2yz^3 + 3y^2\right)\overline{j} + \left(3x^2y^2z^2 + x^4\right)\overline{k}.$

7.
$\overline{a} = x^3\overline{i} + y^3\overline{j} + z^3\overline{k}; \overline{b} = \left(2xyz^3 + 3x^2\right)\overline{i} + \left(x^2z^3 + 2yz^3\right)\overline{j} + \left(3x^2yz^2 + 3y^2z^2\right)\overline{k}.$

8.
$\overline{a} = y^3\overline{i} + z^3\overline{j} + x^3\overline{k}; \overline{b} = \left(2xy^4z + y^2\right)\overline{i} + \left(4x^2y^3z + 2xy\right)\overline{j} + \left(x^2y^4 + 3z^2\right)\overline{k}.$

9.
$\overline{a} = z^3\overline{i} + x^3\overline{j} + y^3\overline{k}; \overline{b} = \left(y^3z^4 + 2xy\right)\overline{i} + \left(3xy^2z^4 + x^2\right)\overline{j} + \left(4xy^3z^3 + 2z\right)\overline{k}.$

10.
$\overline{a} = xy^2\overline{i} + yz^2\overline{j} + zx^2\overline{k}; \overline{b} = \left(yz + 2xy^3\right)\overline{i} + \left(xz + 3x^2y^2\right)\overline{j} + \left(xy + 4z^3\right)\overline{k}.$

11.
$\overline{a} = x^2y\overline{i} + y^2z\overline{j} + z^2x\overline{k}; \overline{b} = \left(2xy^2z^2 + y\right)\overline{i} + \left(2x^2yz^2 + x\right)\overline{j} + \left(2x^2y^2z + 3z^2\right)\overline{k}.$

12.
$\overline{a} = yz^2\overline{i} + zx^2\overline{j} + xy^2\overline{k}; \overline{b} = \left(3x^2y^2z + y^2\right)\overline{i} + \left(2x^3yz + 2xy\right)\overline{j} + \left(x^3y^2 + 4z^3\right)\overline{k}.$

13.
$\overline{a} = y^2z\overline{i} + z^2x\overline{j} + x^2y\overline{k}; \overline{b} = \left(2xy^2z^3 + z\right)\overline{i} + \left(2x^2yz^3 + 3y^2\right)\overline{j} + \left(3x^2y^2z^2 + x\right)\overline{k}.$

14.
$\overline{a} = zx^2\overline{i} + xy^2\overline{j} + yz^2\overline{k}; \overline{b} = \left(y^4z + y\right)\overline{i} + \left(4xy^3z + x\right)\overline{j} + \left(xy^4 + 2z\right)\overline{k}.$

15.
$\overline{a} = z^2x\overline{i} + x^2y\overline{j} + y^2z\overline{k}; \overline{b} = \left(y^3z + y^2\right)\overline{i} + \left(3xy^2z + 2xy\right)\overline{j} + \left(xy^3 + 2z\right)\overline{k}.$

16.
$\overline{a} = (x + y^2)\overline{i} + (y + z^2) + (z + x^2); \overline{b} = \left(yz^2 + z\right)\overline{i} + \left(xz^2 + 2y\right)\overline{j} + \left(2xyz + x\right)\overline{k}.$

17.
$\overline{a} = \left(x + z^2\right)\overline{i} + \left(y + x^2\right)\overline{j} + \left(z + y^2\right)\overline{k}; \overline{b} = \left(2xyz^2 + y\right)\overline{i} + \left(x^2z^2 + x\right)\overline{j} + \left(2x^2yz + 2z\right)\overline{k}.$

18.
$\overline{a} = \left(x^2 + y\right)\overline{i} + \left(y^2 + z\right)\overline{j} + \left(z^2 + x\right)\overline{k}; \overline{b} = \left(yz + 2xy^2\right)\overline{i} + \left(xz + 2x^2y\right)\overline{j} + \left(xy + 3z^2\right)\overline{k}.$

19.
$\overline{a} = \left(x^2 + z\right)\overline{i} + \left(y^2 + x\right)\overline{j} + \left(z^2 + y\right)\overline{k}; \overline{b} = \left(yz + 3x^2y^3\right)\overline{i} + \left(xz + 3x^3y^2\right)\overline{j} + \left(xy + 2z\right)\overline{k}.$

20.
$\overline{a} = \left(y + z^2\right)\overline{i} + \left(z + x^2\right)\overline{j} + \left(x + y^2\right)\overline{k}; \overline{b} = \left(yz + y^2\right)\overline{i} + \left(xz + 2xy\right)\overline{j} + \left(xy + 3z^2\right)\overline{k}.$

21.
$\overline{a} = \left(y^2 + z\right)\overline{i} + \left(z^2 + x\right)\overline{j} + \left(x^2 + y\right)\overline{k}; \overline{b} = \left(yz + 2xy\right)\overline{i} + \left(xz + x^2\right)\overline{j} + \left(xy + 2z\right)\overline{k}.$

22. $\overline{a} = (z^2 + x^2)\,\overline{i} + (x^2 + y^2)\,\overline{j} + (y^2 + z^2)\,\overline{k};\ \overline{b} = (yz + z^2)\,\overline{i} + (xz + 3y^2)\,\overline{j} + (xy + 2xz)\,\overline{k}.$

23 $\overline{a} = (x^2 + y^2)\,\overline{i} + (y^2 + z^2)\,\overline{j} + (z^2 + x^2)\,\overline{k};\ \overline{b} = (yz + 2xz)\,\overline{i} + (xz + 2y)\,\overline{j} + (xy + x^2)\,\overline{k}.$

24. $\overline{a} = (y^2 + z^2)\,\overline{i} + (z^2 + x^2)\,\overline{j} + (x^2 + y^2)\,\overline{k};\ \overline{b} = (yz + z^3)\,\overline{i} + (xz + 2y)\,\overline{j} + (xy + 3xz^2)\,\overline{k}.$

25. $\overline{a} = (x + yz)\,\overline{i} + (y + zx)\,\overline{j} + (z + xy)\,\overline{k};\ \overline{b} = (yz + 2xz^2)\,\overline{i} + (xz + 3y^2)\,\overline{j} + (xy + 2x^2z)\,\overline{k}.$

26. $\overline{a} = (y + zx)\,\overline{i} + (z + xy)\,\overline{j} + (x + yz)\,\overline{k};\ \overline{b} = (yz + 2xy^2)\,\overline{i} + (xz + 2x^2y)\,\overline{j} + (xy + 2z)\,\overline{k}.$

27. $\overline{a} = (x^2 + yz)\,\overline{i} + (y^2 + zx)\,\overline{j} + (z^2 + xy)\,\overline{k};\ \overline{b} = (yz + z^3)\,\overline{i} + (xz + 2y)\,\overline{j} + (xy + 3xz^2)\,\overline{k}.$

28. $\overline{a} = (y^2 + zx)\overline{i} + (z^2 + xy)\overline{j} + (x^2 + yz)\overline{k};\ \overline{b} = (2xy^2z^2 + 3x^2)\overline{i} + (2x^2yz^2 + z)\overline{j} + (2x^2y^2z + y)\overline{k}.$

29. $\overline{a} = (z^2 + xy)\overline{i} + (x^2 + yz)\overline{j} + (y^2 + zx)\overline{k};\ \overline{b} = (y^2z^3 + y)\overline{i} + (2xyz^3 + x)\overline{j} + (3xy^2z^2 + 2z)\overline{k}.$

30. $\overline{a} = (xy + zx)\overline{i} + (yz + xy)\overline{j} + (zx + yz)\overline{k};\ \overline{b} = (yz + z)\overline{i} + (xz + 2y)\overline{j} + (xy + x)\overline{k}.$

ответы

1. Гармоническое; $P = 3/8;\ C = 0;\ U = x^5 + xy^2z^3 + y^4z.$
2. Общего вида; $P = 3\pi/16;\ C = -1;\ U = xy^2 + x^2yz^3 + z^5.$
3. Общего вида; $P = 3\pi/16;\ C = 1;\ U = x^2 + xy^3z^2 + z^4.$
4. Потенциальное; $P = 3\pi/8;\ C = 0;\ U = x^4 + x^3yz^2 + yz^2.$
5. Соленоидальное; $P = 3\pi/16;\ C = -2;\ U = xy + x^2y^3z + z^4.$
6. Соленоидальное; $P = 3\pi/16;\ C = 2;\ U = y^3 + x^2y^2z^3 + x^4z.$
7. Потенциальное; $P = 3\pi/10;\ C = 0;\ U = x^3 + x^2yz^3 + y^2z^3.$
8. Соленоидальное; $P = 2/5;\ C = -9\pi/16;\ U = xy^2 + x^2y^4z + z^3.$
9. Соленоидальное; $P = 2/5;\ C = 9\pi/16;\ U = x^2y + xy^3z^4 + z^2.$
10. Общего вида; $P = \pi/10;\ C = -3/4;\ U = x^2y^3 + xyz + z^4.$

11. Общего вида;
$P = 2/5; C = -3\pi/16; U = xy + x^2 y^2 z^2 + z^3.$

12. Соленоидальное;
$P = 1/5; C = 0; U = xy^2 + x^3 y^2 z + z^4.$

13. Соленоидальное;
$P = 1/5; C = 0; U = y^3 + x^2 y^2 z^3 + xz.$

14. Общего вида;
$P = 2/5; C = 3\pi/16; U = xy + xy^4 z + z^2.$

15. Общего вида;
$P = \pi/10; C = 3/4; U = xy^2 + xy^3 z + z^2.$

16. Общего вида;
$P = 11\pi/16; C = -2; U = y^2 + xyz^2 + xz.$

17. Общего вида;
$P = 11\pi/16; C = 2; U = xy + x^2 yz^2 + z^2.$

18. Общего вида;
$P = 3\pi/8 + 1; C = -3\pi/4; U = x^2 y^2 + xyz + z^3.$

19. Общего вида;
$P = 3\pi/8 + 1; C = 3\pi/4; U = x^3 y^3 + xyz + z^2.$

20. Соленоидальное;
$P = 1 + 3\pi/16; C = 2 - 3\pi/4; U = xy^2 + xyz + z^3.$

21. Соленоидальное;
$P = (3\pi/16) + 1; C = (3\pi/4) - 2; U = x^2 y + xyz + z^2.$

22. Общего вида;
$P = 3\pi/16; C = 2; U = xyz + xz^2 + y^3.$

23. Общего вида;
$P = 9\pi/16; C = -2; U = y^2 + xyz + x^2 z.$

24. Соленоидальное;
$P = 3\pi/8; C = 0; U = y^2 + xyz + xz^3.$

25. Потенциальное;
$P = \pi/2 + 3/8; C = 0; U = xyz + x^2 z^2 + y^3.$

26. Общего вида;
$P = (3\pi/16) + 1; C = (3\pi/4) - 1; U = x^2 y^2 + xyz + z^2.$

27. Потенциальное;
$P = 3\pi/8 + 3/8; C = 0; U = xyz + y^2 + xz^3.$

28. Общего вида;
$P = 3\pi/8; C = -1; U = x^3 + x^2 y^2 z^2 + yz.$

29. Общего вида;
$P = 3\pi/8; C = 1; U = xy^2 z^3 + xy + z^2.$

30. Общего вида;
$P = 3\pi/8; C = 0; U = y^2 + xyz + xz.$

решение задач образца

Пусть S_{xy}, S_{yz}, S_{xz} - части координатных плоскостей xOy, yOz, xOz соответственно, замыкающие поверхность S до замкнутой поверхности S_c.

Тогда $S_c = S \cup S_{xy} \cup S_{yz} \cup S_{xz}$. Пусть далее A, B, C – точки поверхности S ,лежащие на осях Ox, Oy, Oz соответственно. ABCA– замкнутый контур поверхности S ,по которому вычисляется циркуляция C (см. рис.).

1.Определяем класс поля $\bar{a} = (z + xy)\,\bar{i} + (x + yz)\,\bar{j} + (y + zx)\,\bar{k}$, вычислив $div\bar{a}, rot\bar{a}$.

$$div\bar{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(z + xy) + \frac{\partial}{\partial y}(x + yz) + \frac{\partial}{\partial z}(y + zx) = y + z + x \neq 0.$$

$$rot\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\bar{k} = (1 - y)\,\bar{i} + (1 - z)\,\bar{j} + (1 - x)\,\bar{k} \neq 0.$$

Так как div $\bar{a} \neq 0$ и rot $\bar{a} \neq 0$, то $\bar{a}$ - поле общего вида.

2. Вычисляем поток P поля $\bar{a}$ через поверхность S в направлении внешней нормали для сферы.

2.1. По формуле Гаусса-Остроградского.

Замыкаем поверхность S поверхностями S_{xy}, S_{yz}, S_{xz} до замкнутой поверхности S_c.

Пусть T – тело,ограниченное поверхностью S_c, а P_c - поток поля $\bar{a}$ через S_c в направлении внешней нормали.

$$P_c = \iiint_T div\bar{a}dv = \iiint_T (x + y + z)dv = 3\iiint_T xdxdydz.$$

Перейдем к сферическим координатам по формулам

$x=\rho\cos\psi\cos\phi;\, y=\rho\cos\psi\sin\phi;\, z=\rho\sin\psi;\, J=\rho^2\cos\psi.$ Тогда

$$P_c=3\int_0^{\pi/2}d\phi\int_0^{\pi/2}d\psi\int_0^1\rho\cos\psi\cos\phi\rho^2\cos\psi d\rho=3\int_0^{\pi/2}\cos\phi d\phi\int_0^{\pi/2}\cos^2\psi d\psi\int_0^1\rho^3 d\rho=3\cdot 1\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3\pi}{16}.$$

$P=P_c-P_{xy}-P_{yz}-P_{xz}$,где P_{xy},P_{yz},P_{xz} - потоки поля $\overline{a}$ через поверхности S_{xy},S_{yz},S_{xz} соответственно. В силу симметрии поля $\overline{a}$ и поверхности S_c по отношению к переменным x,y,z имеем $P_{xy}=P_{yz}=P_{xz}.$

$$P_{xy}=\iint_{S_{xy}}(z+xy)dydz+(x+yz)\,dzdx+(y+zx)\,dxdy.$$

На поверхности S_{xy} имеем z=0 и dz=0, поэтому $P_{xy}=\iint_{S_{xy}}ydxdy.$ Этот интеграл взят по стороне поверхности S_{xy} ,нормаль к которой составляет угол π с осью Oz. Сведем поверхностный интеграл к двойному по S_{xy}, изменив направление нормали на противоположное, и перейдем к полярным координатам по

Формулам $x=r\cos\phi;\, y=r\sin\phi;\, J=r.$ Тогда

$$P_{xy}=-\int_0^{\pi/2}d\phi\int_0^1 r\sin\phi rdr=-\int_0^{\pi/2}\sin\phi d\phi\int_0^1 r^2dr=-1\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}.$$

Поэтому

$$P=\frac{3\pi}{16}-3\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{3\pi}{16}+1.$$

2.2.Вычислим поток P непосредственно через поверхностный интеграл.

$$P=\iint_S(z+xy)\,dydz+(x+yz)dzdx+(y+zx)\,dxdy=3\iint_S(y+zx)dxdy.$$

Сведем поверхностный интеграл к двойному по области S_{xy}.

$$P=3\iint_S\left(y+x\sqrt{1-x^2-y^2}\right)dxdy.$$ Перейдем к полярным координатам.

$$P=3\int_0^{\pi/2}d\phi\int_0^1\left(r\sin\phi+\sqrt{1-r^2}\,r\cos\phi\right)rdr=$$

$$=3\cdot\int_0^{\pi/2}\sin\phi d\phi\int_0^1 r^2dr+3\int_0^{\pi/2}\cos\phi d\phi\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}dr=3\frac{1}{3}+3\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}dr.$$

В последнем интеграле делаем подстановку r = sint . Тогда

$$P=1+3\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 tdt=1+\frac{3}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2tdt=1+\frac{3}{8}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)dt=1+\frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{2}=1+\frac{3\pi}{16}.$$

Ответ:

$$P=1+\frac{3\pi}{16}.$$

3. Вычисляем циркуляцию поля $\overline{a}$ по замкнутому контуру АВСА.

3.1 По формуле Стокса.

$$C=\iint_S rot_n\overline{a}dS=\iint_S(1-y)dydz+(1-z)\,dzdx+(1-x)\,dxdy.$$

В силу симметрии поля $\overline{a}$ и поверхности S вычисление циркуляции C упрощается.

C= $3\int_S(1-x)dxdy.$ Выражаем поверхностный интеграл через двойной по S_{xy}.

Тогда C= $3\iint_{S_{xy}}(1-x)dxdy.$ Переходим к полярным координатам. Получаем

C= $$3\int_0^{\pi/2}d\phi\int_0^1(1-r\cos\phi)rdr=3\int_0^{\pi/2}d\phi\int_0^1 rdr-3\int_0^{\pi/2}\cos\phi d\phi\int_0^1 r^2dr=\frac{3\pi}{4}-1.$$

3.2. Непосредственно с помощью криволинейного интеграла.

C=

$$\oint\limits_{(ABCA)_+} a_x dx + a_y dy + a_z dz = 3\int\limits_{AB}(z+xy)dx + (x+yz)\,dy + (y+zx)\,dz.$$

На линии AB: z=0 и dz=0 , поэтому C= $3\int\limits_{AB} xydx + xdy$. Зададим дугу окружности AB параметрическими уравнениями: $x=\cos\phi;\ y=\sin\phi;\ 0\le\phi\le\pi/2.$

Тогда

C=

$$3\int\limits_0^{\pi/2}\left(-\cos\phi\sin^2\phi+\cos^2\phi\right)d\phi = -3\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2\phi\, d\sin\phi + \frac{3}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1+\cos 2\phi)\,d\phi = \frac{3\pi}{4} - 1.$$

Ответ: $\frac{3\pi}{4} - 1.$

4. Изучаем поле $\overline{b} = \left(2xy^2z^2 + y^2\right)\overline{i} + \left(2x^2yz^2 + 2xy\right)\overline{j} + \left(2x^2y^2z + 3z^2\right)\overline{k}$.

4.1. Проверяем потенциальность поля $\overline{b}$. Для этого следует убедиться, что ротор поля равен нулю.

$$rot\overline{b} = \left(\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y}\right)\overline{k} =$$

$$= \left(4x^2yz - 4x^2yz\right)\overline{i} + \left(4xy^2z - 4xy^2z\right)\overline{k} + \left(4xyz^2 - 4xyz^2\right)\overline{k} \equiv 0.$$

4.2. Вычисляем потенциал U поля $\overline{b}$ по формуле

$$U = \int\limits_0^x b_x 2(x,0,0)\,dx + \int\limits_0^y b_y(x,y,0)\,dy + \int\limits_0^z b_z(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_0^x 0dx + \int\limits_0^y 2xydy + \int\limits_0^z \left(2x^2y^2z + 3z^2\right)dz = xy^2 + x^2y^2z^2 + z^3.$$

4.3. Проверяем истинность найденного потенциала.

$$U'_x = y^2 + 2xy^2z^2 = b_x;\ U'_y = 2xy + 2x^2yz^2 = b_y;\ U'_z = 2x^2y^2z + 3z^2 = b_z.$$

Ответ: $U = xy^2 + x^2y^2z^2 + z^3.$

4.4. Находим работу сил поля при перемещении материальной точки из точки O(0,0,0) в точку M(1,1,1) по формуле W = U(1,1,1) – U(0,0,0) = 3 – 0 = 3.

Ответ: W = 3.