3 Приближенное вычисление интегралов. Ряд Тейлора. Разложение функций в степенной ряд.

1. Определения и формулы для решения задач

Определение. Степенной ряд вида

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \ \forall x \in X$$

называется рядом Тейлора для функции $f(x)$ на множестве X.

Частный случай ряда Тейлора при $a = 0$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n .$$

называется рядом Маклорена.

Разложения в ряд Маклорена основных элементарных функций

1) $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots; \ \ x \in (-\infty; +\infty).$

2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots; \ \ x \in (-\infty; +\infty).$

3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!};$

$x \in (-\infty; +\infty).$

4) $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \ x \in (-1;\, 1].$

5) $\operatorname{arctg} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \ \ x \in [-1;\, 1].$

6) $\operatorname{s}hx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \quad x \in (-\infty; +\infty).$

7) $\operatorname{c}hx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \ . \ x \in (-\infty; +\infty).$

2. Образцы задач с решениями

1. Вычислить приближенно интеграл $\int_0^1 \frac{\sin x^5}{x} dx$

с точностью до $\varepsilon = 0.001$. 0тв. $0,211$.

Решение. Применим разложение в ряд Маклорена функции $\sin x$:

$$\frac{1}{x}\sin x^5 = \frac{1}{x}\left(x^5 - \frac{x^{15}}{3!} + \frac{x^{25}}{5!} - \frac{x^{35}}{7!} + \dots \right) = x^4 - \frac{x^{14}}{3!} + \frac{x^{24}}{5!} - \frac{x^{34}}{7!} + \dots$$

Полученное разложение подставляем под знак интеграла:

$$\int_0^1 \frac{\sin x^5}{x} dx = \int_0^1 \left(x^4 - \frac{x^{14}}{3!} + \frac{x^{24}}{5!} - \frac{x^{34}}{7!} + \dots \right) dx =$$

$$= \frac{x^5}{5} - \frac{x^{15}}{15\cdot 6} + \frac{x^{25}}{25\cdot 120} - \dots\Big|_0^1 =$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{90} + \frac{1}{3000} - \dots = 0,2 - 0,0111 + 0,0003 + \dots = 0,2114 \approx 0,211.$$

2. Разложить в степенной ряд по степеням x функцию $y = \int_0^x chx^2 dx$.

Решение. Применяем разложение в степенной ряд функции $y = chx$

и подставляем его под знак интеграла:

$$y = \int_0^x chx^2 dx \int_0^x \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) dx =$$

$$= x + \frac{x^3}{2!3} + \frac{x^5}{4!5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)} + \dots$$

3.Написать три первые отличные от нуля члены разложения в ряд по степеням x для функции $y = e^x \cos x$.

Решение. Применяем разложение в степенной ряд функций

$y=e^x$ и $y=\cos x$. Перемножаем полученные ряды и оставляем первые три члена, отличные от нуля:

$$y=e^x\cos x=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right)=$$

$$=1+x+x^2\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{2!}\right)+x^3\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{2!}\right)+\ldots=1+x-\frac{x^3}{3}+\ldots$$

3. Задачи для решения

Вычислите приближенно интеграл с точностью до $\varepsilon=0.001$.

1. $\int_0^1 \sin x^2 dx$.
2. $\int_0^1 \cos x^2 dx$.
3. $\int_0^1 e^{-x^4} dx$.
4. $\int_0^1 \frac{\sin x^3}{x} dx$.
5. $\int_0^1 \sqrt{1+x^5}\, dx$.
6. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$.
7. $\int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx$.
8. $\int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$.
9. $\int_0^{1/2} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$.
10. $\int_0^{0.1} \frac{e^x-1}{x} dx$.
11. $\int_0^{1/2} x\ln(1+x^2) dx$.

Разложить в степенной ряд по степеням x функцию

12. $y=\int_0^x e^{-t^2} dt$.
13. $y=\int_0^x \sin t^2 dt$.
14. $y=\int_0^x \cos t^2 dt$.
15. $y=\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$.
16. $y=\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$.
17. $y=\int_0^x \operatorname{sh} t^2 dt$.

Написать три первые отличные от нуля члены разложения в ряд по степеням x для функции

15. $y = tgx$.

16. $y = e^{\cos x}$.

17. $y = \sec x$.

18. $y = e^{x} \sin x$.

Ответы

1. 0.310.
2. 0.905.
3. 0.845.
4. 0.310.
5. 0.905.
6. 0.845.
7. 0.199
8. 0.098.
9. 0.248.
10. 0.102.
11. 0.015.
12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(n-1)!}$.
13. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!}$.
14. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
15. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$.
16. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n}}{n^{2}}$.
17. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!}$.
18. $x + x^{3} + \frac{2}{15}x^{5} + \ldots$
19. $e(1 - \frac{x^{2}}{2} + \frac{x^{4}}{6} - \ldots)$.
20. $1 + \frac{x^{2}}{2} + \frac{5}{24}x^{4} + \ldots$
21. $x + x^{2} + \frac{1}{3}x^{3} + \ldots$

4. Теоретические вопросы

1. Напишите ряд Тейлора для функции $f(x)$.
2. Напишите ряд Маклорена для функции $f(x)$.
3. Напишите ряд Маклорена для функции e^x. Где он сходится?
4. Напишите ряд Маклорена для функции $\sin x$. Где он сходится?
5. Напишите ряд Маклорена для функции $\cos x$. Где он сходится?
6. Напишите биномиальный ряд. Каков его радиус сходимости?
7. Сформулируйте теорему, устанавливающую условия сходимости ряда Тейлора к функции, для которой он составлен.
8. Напишите ряд Маклорена для функции $y = \ln(1+x)$. Где он сходится?
9. Как получить разложение в степенной ряд функции $y = \text{arctg} x$, знная разложение для функции $y = \dfrac{1}{1+x^2}$? Где этот ряд сходится?
10. Как получить разложение в степенной ряд функции $y = \arcsin x$, зная разложение для функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$? Где этот ряд сходится?
11. Какой ряд нужно применять для разложения в степенной ряд функции $y = \dfrac{1}{1+x^2}$?
12. Какой ряд нужно применять для разложения в степенной ряд функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$?