Определение класса векторного поля

1. Формулы для решения задач

Теорема 1. Если векторное поле

$$\vec{a}(M) = a_x(x,y,z)\vec{i} + a_y(x,y,z)\vec{j} + a_z(x,y,z)\vec{k}$$

непрерывно и имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial a_x}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial y}, \frac{\partial a_z}{\partial z}$ в области G, то в любой точке $M \in G$ дивергенция выражается формулой

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = \frac{\partial a_x(M)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(M)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(M)}{\partial z}.$$

Теорема 2. В декартовой системе координат ротор векторного поля вычисляется по формуле

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k},$$

или, в символической форме,

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix},$$

где определитель вычисляется разложением по элементам первой строки.

Векторные поля классифицируются по результатам дифференциальных операций $\operatorname{rot}\vec{a}$ и $\operatorname{div}\vec{a}$.

1. Потенциальное поле $\operatorname{rot}\vec{a} \equiv 0$.

2. Соленоидальное поле: $\operatorname{div}\vec{a} \equiv 0$.

3. Лапласово (или гармоническое) поле: $\operatorname{rot}\vec{a} \equiv \vec{0}$, $\operatorname{div}\vec{a} \equiv 0$.

4. Поле общего вида: rot $\vec{a} \neq \vec{0}$, div $\vec{a} \neq 0$.

Предполагается, что все рассматриваемые частные производные координат поля $\vec{a}$ существуют и непрерывны.

2. Образец задачи с решением

Определить класс поля $\overline{a} = (z + xy)\,\overline{i} + (x + yz)\,\overline{j} + (y + zx)\,\overline{k}$.

Решение.

Определяем класс поля $\overline{a} = (z + xy)\,\overline{i} + (x + yz)\,\overline{j} + (y + zx)\,\overline{k}$, вычислив $div\overline{a}, rot\overline{a}$.

$$div\overline{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(z + xy) + \frac{\partial}{\partial y}(x + yz) + \frac{\partial}{\partial z}(y + zx) = y + z + x \neq 0.$$

$$rot\overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\overline{k} =$$

$$= (1 - y)\,\overline{i} + (1 - z)\,\overline{j} + (1 - x)\,\overline{k} \neq 0$$

Так как div $\overline{a} \neq 0$ и rot $\overline{a} \neq 0$, то $\overline{a}$ - поле общего вида.

3. Задачи для решения

Определить класс поля

1. $\overline{a} = yz\overline{i} + xz\overline{j} + xy\overline{k}$.
2. $\overline{a} = yz\overline{i} + xz\overline{j} + xy\overline{k}$.
3. $\overline{a} = xy\overline{i} + yz\overline{j} + xz\overline{k}$.
4. $\overline{a} = xz\overline{i} + xy\overline{j} + yz\overline{k}$.
5. $\overline{a} = x^2\overline{i} + y^2\overline{j} + z^2\overline{k}$.
6. $\overline{a} = y^2\overline{i} + z^2\overline{j} + x^2\overline{k}$.

7. $\overline{a} = z^2\overline{i} + x^2\overline{j} + y^2\overline{k}$.

8. $\overline{a} = x^3\overline{i} + y^3\overline{j} + z^3\overline{k}$.

9. $\overline{a} = y^3\overline{i} + z^3\overline{j} + x^3\overline{k}$.

10. $\overline{a} = z^3\overline{i} + x^3\overline{j} + y^3\overline{k}$.

11. $\overline{a} = xy^2\overline{i} + yz^2\overline{j} + zx^2\overline{k}$.

12. $\overline{a} = x^2y\overline{i} + y^2z\overline{j} + z^2x\overline{k}$.

Ответы.

1. Гармоническое.
2. Общего вида.
3. Общего вида.
4. Потенциальное.
5. Соленоидальное.
6. Соленоидальное.
7. Потенциальное.
8. Соленоидальное.
9. Соленоидальное.
10. Общего вида.
11. Общего вида.
12. Соленоидальное.

13.

3. Теоретические вопросы

1. Что такое дивергенция векторного поля?
2. Что такое ротор векторного поля?
3. Какое поле называется потенциальным?
4. Какое поле называется соленоидальным?
5. Какое поле называется гармоническим?
6. Что называется оператором Гамильтона ∇ ?
7. Как выразить дивергенцию через оператор Гамильтона ∇ ?
8. Как выразить ротор через оператор Гамильтона ∇ ?
9. К какому классу полей относится поле вектора-градиента?
10. Что такое гармоническая функция? Какое отношение она имеет к потенциальному полю?
11. Какому уравнению подчиняется гармоническая функция?
12. Сформулируйте необходимое и достаточное условие потенциальности поля.

14.

15.