§ 1. Алгебра событий

1.1 Определения и формулы для решения задач

1) Рассматривается эксперимент (опыт, испытание, наблюдение). Предполагается, что его можно проводить неоднократно. В результате эксперимента могут появляться различные события, составляющие некоторое множество F. Сам эксперимент обозначают буквой E. Наблюдаемые события разделяются на три вида: достоверное, невозможное, случайное.

2) *Невозможным* называется событие, которое заведомо не произойдет в результате проведения эксперимента E. Оно обозначается символом пустого множества $\varnothing$.
3) *Случайным* называется событие, которое может произойти или не произойти в результате эксперимента E. Случайные события обозначаются первыми большими буквами латинского алфавита: $A, B, C, \ldots$.
4) *Дополнительным*, иначе – *противоположным* событию A называется событие, обозначаемое $\overline{A}$, которое происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A.
5) *Элементарным событием* ω называется непосредственный исход эксперимента E.
6) Суммой (или объединением) событий называется событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из данных событий.
7) Сумма событий обозначается несколькими способами.

   Алгебраические обозначения: $A+B,\ A+B+C,\ \sum\limits_k A_k$.

   Теоретико-множественные обозначения: $A\bigcup B,\ A\bigcup B\bigcup C,\ \bigcup\limits_k A_k$.

   Логические обозначения: A или B, A или B или C .
8) Произведением (или совмещением, пересечением) событий называется событие, происходящее тогда и только тогда, когда все данные события происходят вместе (одновременно).
9) Произведение событий также обозначается несколькими способами.

   Алгебраические обозначения: $AB,\ ABC,\ \prod\limits_k A_k$.

   Теоретико-множественные обозначения: $A\bigcap B,\ A\bigcap B\bigcap C,\ \bigcap\limits_k A_k$.

Логические обозначения: A и B, A и B и C.

10) События называются несовместными, если их произведение есть невозможное событие:

$$A_1 A_2 \ldots A_n = \varnothing.$$

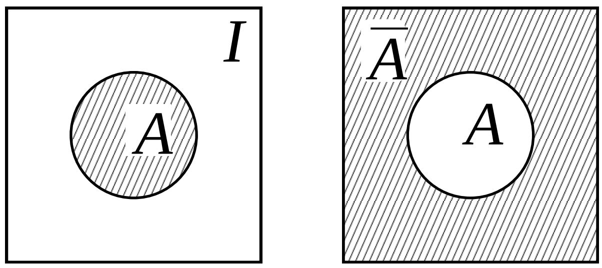
Заметим, что если события попарно несовместны, то они несовместны и в совокупности.

11) Полной группой событий называется множество событий, сумма которых есть достоверное событие:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = I.$$

12) Событие B называется частным случаем события A, если с появлением события B появляется и событие A. Говорят также, что событие B влечет событие A, что записывается в виде $B \subset A$.

События можно наглядно иллюстрировать с помощью *диаграмм Венна* (английский математик, 1832–1923). Достоверное событие изображается квадратом; случайное событие A – областью внутри квадрата; дополнительное событие $\overline{A}$ – областью внутри квадрата вне области, изображающей событие A (рис. 1.1).



$\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$; $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ – Формулы Де-Моргана

1.2. Образцы задач с решениями

1. Укажите неверное равенство.

$$A + \overline{A} = \Omega; \quad (A + \varnothing)A = A; \quad (A + \Omega)A = A; \quad \Omega\varnothing = \Omega.$$

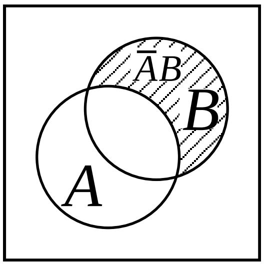
Решение. Три первых равенства являются верными по определению суммы и произведения событий, а последнее равенство – неверно. Действительно, по определению произведения событий произведение событий Ω и $\varnothing$ происходит тогда, когда оба события происходят вместе, но событие $\varnothing$ никогда не происходит, а событие Ω происходит всегда. Следовательно, произведение $\Omega\varnothing$ никогда не происходит. Верным является равенство $\Omega\varnothing = \varnothing$.

2. Выразите событие АВ по формулам Де Моргана через события $\overline{A}$, и $\overline{B}$.

   Решение. Имеем $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$. Переходим к противоположным Событиям в обеих частях равенства. Получаем $AB = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$.

3. Установите справедливость равенства $A + B = A + \overline{A}B$ на основе диаграммы Венна для события $A + \overline{A}B$.

   Решение. Строим диаграмму Венна для события $A + \overline{A}B$:



На диаграмме Венна видно, что множество, изображающее $A + B$, представлено как объединение непересекающихся множеств, изображающих A и $\overline{A}B$.

Для убедительности приведем и аналитическое доказательство.

$$A + B = A + BI = A + B(A + \overline{A}) = (AI + AB) + \overline{A}B = A(I + B) + \overline{A}B =$$

$$= AI + \overline{A}B = A + \overline{A}B.$$

1.3. Задачи для решения

1. Покажите сумму двух событий на диаграмме Венна.
2. Покажите произведение двух событий на диаграмме Венна.
3. Покажите взаимно дополнительные события на диаграмме Венна.
4. Чему равна сумма элементарных событий, составляющих полную группу?
5. Укажите неверное равенство: $A+\Omega=A$, $A+\varnothing=A$, $A\cdot\Omega=A$, $A\cdot\varnothing=\varnothing$. Исправьте в нем правую часть.
6. Если $A\subset B$, то чему равно $A+B$?
7. Если $A\subset B$, то чему равно AB?
8. Чему равно произведение несовместных событий?
9. Выразите $\overline{A+B}$ через $\overline{A}$ и $\overline{B}$ по формуле Де Моргана.
10. Пусть $B\subset A$. Покажите события A и B на диаграмме Венна.
11. Выразите $\overline{AB}$ через $\overline{A}$ и $\overline{B}$ по формуле Де Моргана.
12. Как связаны события $A+B$ и $AB+\overline{A}B+A\overline{B}$?
13. Покажите событие $A\overline{B}$ на диаграмме Венна.
14. Изобразите на диаграмме Венна сумму трех событий A+B+C.
15. Изобразите на диаграмме Венна произведение трех событий ABC.

1.4. Теоретические вопросы

2. Что такое сумма событий?
3. Дайте определение соотношения: событие A влечет событие B.
4. Дайте определение события, противоположного событию A.
5. Что называется произведением двух событий ?
6. Запишите формулы, выражающие переместительные, сочетательные, распределительные свойства сложения и умножения событий.
7. Какие события могут появиться в результате проведения эксперимента. Дайте их определения.
8. Что такое диаграммы Венна?
9. Какие события называются несовместными? Как они изображаются на диаграмме Венна?
10. Что такое полная группа событий?
11. Что такое частный случай события?

12. Какие события называются эквивалентными?
13. Что такое событие в аксиоматической схеме?