§ 5. Биномиальная вероятность. Приближенная формула Пуассона

5.1. Определения и формулы для решения задач

Схема Бернулли проведения независимых испытаний состоит в том, что независимо проводится n испытаний (опытов), в каждом из которых наблюдаемое событие A появляется с вероятностью p $(0 < p < 1)$ и не появляется с вероятностью $q = 1 - p$.

При проведении испытаний по схеме Бернулли ставится задача – найти вероятность $P_{n,k}(p)$, что в результате проведенных n независимых испытаний событие A появится точно k раз, безразлично в каком порядке.

Справедлива формула

$$P_{n,k}(p) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \quad 0 < p < 1. \tag{6.1}$$

Вероятности $P_{n,k}(p)$ (более простая запись: $P_{n,k}$) называются *биномиальными вероятностями*, поскольку являются членами разложения бинома

$$(q + p)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Здесь C_n^k – число сочетаний из n по k.

Приближенная формула Пуассона имеет вид

$$P_{n,k}(p) \approx \frac{a^k}{k!} e^{-a}; \quad a = np; \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{7.1}$$

Эта формула применяется при больших n и малых p. Погрешность формулы (7.1) имеет порядок $1/n$, а сама формула (7.1) является следствием предельной теоремы Пуассона.

Теорема Пуассона. Если $p_n = \dfrac{a}{n}$, *где* a *– положительная постоянная, то при любом фиксированном* k

$$P_{n,k}(p_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{a^k}{k!} e^{-a}.$$

5.2. Образцы задач с решениями

1. $n=4$ орудия независимо выстрелили по цели. Вероятность попадания в цель для каждого орудия равна $p=0.4$. Найти вероятность, что в цель попадёт точно одно орудие. Отв. $4\cdot 0.4\cdot 0.6^3\approx 0.35$.

   Решение. Условия задачи укладываются в схему Бернулли проведения испытаний. Применяем формулу для биномиальной вероятности при *k*=1.

   $$P_{n,k}(p)=C_n^k p^k q^{n-k}=C_4^1 pq^3=4\cdot 0,4\cdot(0,6)^3\approx 0,35.$$

2. 4 сообщения посланы независимо по различным каналам связи. Вероятность, что каждое сообщение дойдет до адресата, равна $p=0.4$. Найти вероятность, что до адресата дойдет не менее трех сообщений. Отв. $4p^3q+p^4\approx 0.18$.

   Решение. Условия задачи укладываются в схему Бернулли проведения испытаний. До адресата должно дойти 3 или 4 сообщения. Искомая вероятность равна сумме двух биномиальных вероятностей при *к*=3 и *к*=4.

   $$P(A)=4p^3q+p^4=4(0,4)^3 0,6+(0,4)^4\approx 0,18.$$

3. В партии $n=100$ изделий. Вероятность брака $p=0.01$. Используя приближенную формулу Пуассона, напишите формулу для вероятности события, означающего, что в партии не более одного бракованного изделия.

   Отв. $2e^{-1}\approx 0,74$.

   Решение. По условию задачи заключаем, что в парии должно быть либо одно, либо ни одного бракованного изделия. Применяем приближенную формулу Пуассона для биномиальных вероятностей при *к*=0 и *к*=1. При этом *a*= np=1. Тогда искомая вероятность равна

   $$P(A)=\frac{a^0}{0!}e^{-a}+\frac{a^1}{1!}e^{-a}=e^{-1}+e^{-1}=2e^{-1}\approx 0,74.$$

5.3. Задачи для решения

1. $n=3$ орудия независимо выстрелили по цели. Вероятность попадания в цель для каждого орудия равна $p=0.6$. Найти вероятность, что в цель попадёт точно одно орудие. Отв. $3\cdot 0.6\cdot 0.4^2=0.288$.
2. 4 сообщения посланы независимо по различным каналам связи. Вероятность, что каждое сообщение дойдет до адресата, равна $p=0.6$.

Найти вероятность, что до адресата дойдет не менее трех сообщений. Отв. $4p^3q + p^4 \approx 0.48$.

3. В цеху $n = 5$ однотипных станков. Вероятность выхода из строя каждого в течение времени T равна $p = 0.3$. Станки работают независимо. Найти вероятность, что в течение времени T из строя выйдет не более одного станка. Отв. $q^5 + 5q^4 p \approx 0.53$.
4. В цеху $n = 4$ однотипных станков. Вероятность выхода из строя каждого в течение времени T равна $p = 0.2$. Станки работают независимо. Найти вероятность, что в течение времени T из строя выйдет не более одного станка. Отв. $q^4 + 4q^3 p \approx 0.82$.
5. В цеху $n = 5$ однотипных станков. Вероятность выхода из строя каждого в течение времени T равна $p = 0.4$. Станки работают независимо. Найти вероятность, что в течение времени T из строя выйдет не более одного станка. Отв. $q^5 + 5q^4 p \approx 0.34$.
6. В цеху $n = 4$ однотипных станков. Вероятность выхода из строя каждого в течение времени T равна $p = 0.3$. Станки работают независимо. Найти вероятность, что в течение времени T из строя выйдет не более одного станка. Отв. $q^4 + 4q^3 p \approx 0.65$.
7. На стенде испытываются независимо $n = 4$ приборов. Вероятность выхода из строя каждого равна $p = 0.2$. Найти вероятность того, что из строя выйдет точно $k = 2$ прибора. $C_4^2 p^2 q^2 \approx 0.31$.
8. На стенде испытываются независимо $n = 3$ приборов. Вероятность выхода из строя каждого равна $p = 0.4$. Найти вероятность того, что из строя выйдет точно $k = 2$ прибора. Отв. $C_3^2 p^2 q = 0.288$.
9. На стенде испытываются независимо $n = 5$ приборов. Вероятность выхода из строя каждого равна $p = 0.4$. Найти вероятность того, что из строя выйдет точно $k = 1$ прибор. Отв. $C_4^3 p^3 q \approx 0.11$.
10. На стенде испытываются независимо $n = 5$ приборов. Вероятность выхода из строя каждого равна $p = 0.4$. Найти вероятность того, что из строя выйдет точно $k = 1$ прибор. Отв. $5pq^4 \approx 0.26$.
11. В партии $n = 100$ изделий. Вероятность брака $p = 0.01$. Используя приближенную формулу Пуассона, напишите формулу для вероятности события, означающего, что в партии точно одно бракованное изделие.

Отв. $e^{-1} \approx 0.37$.

12. В партии $n=100$ изделий. Вероятность брака $p=0.01$. Используя приближенную формулу Пуассона, напишите формулу для вероятности события, означающего, что в партии точно два бракованных изделия.

Отв. $\frac{1}{2}e^{-2} \approx 0.068$.

13. В партии $n=100$ изделий. Вероятность брака $p=0.01$. Используя приближенную формулу Пуассона, напишите формулу для вероятности события, означающего, что в партии нет бракованных изделий.

Отв. $e^{-1} \approx 0.37$.

5.4. Теоретические вопросы

1. Вероятность брака изделия равна p. В партии насчитывается n изделий. Напишите формулу для вероятности события, означающего, что в партии содержится хотя бы одно бракованное изделие. Отв. $1-(1-p)^n$.

2. Вероятность брака детали равна p. В партии насчитывается n деталей. Напишите формулу для вероятности события, означающего, что в партии содержится не более одной бракованной детали. Отв. $(1-p)^n + np(1-p)^{n-1}$.

3. В лаборатории n однотипных приборов. За время T прибор выходит из строя с вероятностью p. Напишите формулу вероятности события, означающего, что за время T из строя выйдет точно 2 прибора. Отв. $C_n^2 p^2 (1-p)^{n-2}$.

4. В лаборатории n однотипных приборов. За время T прибор выходит из строя с вероятностью p. Напишите формулу вероятности события, означающего, что за время T из строя выйдет точно 3 прибора. Отв. $C_n^3 p^3 (1-p)^{n-3}$.

5. Какая последовательность испытаний называется схемой Бернулли?

6. Запишите формулу биномиальной вероятности.

7. Запишите приближенную формулу Пуассона для вычисления биномиальной вероятности.

8. Сформулируйте теорему Пуассона о пределе биномиальной вероятности $p_{n,k}(p)$ при $n \to \infty$.