§ 10 . Числовые характеристики двумерной случайной величины. Зависимость и независимость.

Теоретические вопросы

1. Как вычислить ковариацию (корреляционный момент) двумерной непрерывной случайной величины, зная её плотность вероятности $f_{XY}(x,y)$?

2. В каком диапазоне изменяется коэффициент корреляции ρ_{XY}? Какому случаю соответствуют его крайние значения?
3. Что такое ковариация (корреляционный момент) случайных величин X и Y?
4. Если случайные величины X и Y независимы, чему равен их коэффициент корреляции ρ_{XY}?
5. Если коэффициент корреляции $\rho_{XY} = -1$, как связаны случайные величины X и Y?
6. Сформулируйте необходимое и достаточное условие независимости компонент двумерной нормальной случайной величины.
7. Запишите плотность вероятности двумерной нормальной случайной величины с некоррелированными компонентами.
8. Как связаны друг с другом понятия независимости и некоррелированности двух случайных величин?
9. Сформулируйте определение независимости случайных величин X,Y.
10. Запишите корреляционную матрицу двумерной случайной величины. Объясните смысл величин, входящих в формулу.
11. Запишите необходимое и достаточное условие независимости непрерывных случайных величин X,Y через их плотности вероятности.
12. Запишите необходимое и достаточное условие независимости случайных величин X,Y через их функции распределения.
13. Запишите необходимое и достаточное условие независимости дискретных случайных величин X,Y через вероятности их отдельных значений.
14. Что такое коэффициент корреляции случайных величин X,Y? Для какой цели он применяется?
15. Что такое второй смешанный начальный момент случайных величин X,Y?

16. Как выражается корреляционный момент K_{XY} через начальные моменты случайных величин X,Y?
17. Как вычислить ковариацию (корреляционный момент) двумерной дискретной случайной величины?
18. Если случайные величины X,Y связаны линейной зависимостью $Y = aX + b$, то чему равен их коэффициент корреляции r_{XY} ?
19. Если $|r_{XY}| = 1$, то как характеризуется зависимость между X,Y?
20. Если для нормальной двумерной случайной величины (X,Y) коэффициент корреляции равен нулю, то как связаны между собой X иY?

Ответы к теоретически вопросам

1. $K_{XY} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)(y - m_Y) f_{XY}(x, y) dxdy.$
2. $-1 \le \rho_{XY} \le 1$. Если $Y = aX + b$, то $|\rho_{XY}| = 1$;

   $\rho_{XY} = -1$ при $a < 0$. $\rho_{XY} = 1$ при $a > 0$;
3. $K_{XY} = M\left[(X - m_X)(Y - m_Y)\right].$
4. $0.$
5. $Y = aX + b; a < 0$ с вероятностью 1.
6. Для того, чтобы компоненты двумерной нормальной случайной величины были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы коэффициент корреляции между ними был равен нулю.
7. $f_{XY}(x, y) = \left(\frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - m_X)^2}{2\sigma_X} \right] \right) \left(\frac{1}{\sigma_Y \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y - m_Y)^2}{2\sigma_Y} \right] \right).$
8. Если случайные величины независимы, то они и некоррелированны. Если случайные величины некоррелированны, то они могут быть как зависимыми, так и независимыми.
9. Случайные величины X, Y называются независимыми, если независимыми являются события $X < x$ и $Y < y$ для любых x, y.
10. $\begin{pmatrix} D_X & K_{XY} \\ K_{XY} & D_Y \end{pmatrix}$; D_X, D_Y – дисперсии компонент, K_{XY} – ковариация.
11. $f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ для любых x, y.
12. $F_{XY}(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$ для любых x, y.
13. $p_{ik} = p_{i.} p_{.k}$ для любых i, k; $(i = 1, 2, ...; k = 1, 2, ...)$.

14. $\rho_{XY} = \dfrac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$; K_{XY} – корреляционный момент; σ_X, σ_Y – средние квадратические отклонения X, Y. Применяется для исследования зависимости между X, Y.
15. $a_{11} = M\left[XY\right]$.
16. $K_{XY} = M\left[XY\right] - m_X m_Y$.
17. $K_{XY} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left(x_i - m_X\right)\left(y_k - m_Y\right)p_{ik}$. $p_{ik} = P\left(X = x_i, Y = y_k\right)$.
18. $\rho_{XY} = -1$ при $a < 0$; $\rho_{XY} = 1$ при $a > 0$.
19. Линейная: $Y = aX + b$.
20. Независимы.