

§ 5. Доверительные интервалы

5.1. Задачи для решения с ответами

1. Доверительный интервал

$$P\left(\bar{x} - \frac{(\dots)t_{(1+\gamma)/2}(n-1)}{\sqrt{n-1}} < m < \bar{x} + \frac{(\dots)t_{(1+\gamma)/2}(n-1)}{\sqrt{n-1}}\right) = \gamma$$

оценивает математическое нормальная генеральной совокупности. Допишите пропущенный параметр в числителе дроби и укажите его смысл.

Отв. s – выборочное среднее квадратическое отклонение.

2. Доверительный интервал

$$P\left((\dots)\sqrt{n}/\sqrt{\chi_{(1+\gamma)/2}^2(n-1)} < \sigma < (\dots)\sqrt{n}/\sqrt{\chi_{(1-\gamma)/2}^2(n-1)}\right) = \gamma$$
 оценивает

среднее квадратическое отклонение σ нормальной генеральной совокупности. Допишите пропущенный множитель в числителях дробей и объясните его смысл.

Отв. s – выборочное среднее квадратическое отклонение.

3. Доверительный интервал

$$P\left(\bar{x} - \frac{s(\dots)}{\sqrt{n-1}} < m < \bar{x} + \frac{s(\dots)}{\sqrt{n-1}}\right) = \gamma$$

оценивает математическое ожидание нормальной генеральной совокупности. Допишите пропущенный множитель в числителе дроби и укажите его смысл.

Отв. $t_{(1+\gamma)/2}(n-1)$ – квантиль распределения Стьюдента порядка $(1+\gamma)/2$ с $n-1$ степенями свободы..

5. Доверительный интервал

$$P\left(\dots - \frac{st_{(1+\gamma)/2}(n-1)}{\sqrt{n-1}} < m < \dots + \frac{st_{(1+\gamma)/2}(n-1)}{\sqrt{n-1}}\right) = \gamma$$
 оценивает

математическое ожидание нормальной генеральной совокупности. Допишите пропущенное слагаемое и укажите его смысл.

Отв. \bar{x} – выборочное среднее.

6. Доверительный интервал

$$P\left(\dots - \frac{su_{(1+\gamma)/2}}{\sqrt{n}} < m < \dots + \frac{su_{(1+\gamma)/2}}{\sqrt{n}}\right) = \gamma$$

оценивает математическое ожидание генеральной совокупности при

большом объеме выборки. Допишите пропущенное слагаемое и объясните его смысл.

Отв. \bar{x} – выборочное среднее.

7. Доверительный интервал $P\left(\bar{x} - \frac{(\dots)u_{(1+\gamma)/2}}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + \frac{(\dots)u_{(1+\gamma)/2}}{\sqrt{n}}\right) = \gamma$

оценивает математическое ожидание генеральной совокупности при большом объеме выборки. Допишите пропущенный множитель в числителе и объясните его смысл.

Отв. s – выборочное среднее квадратическое отклонение.

8. Доверительный интервал $P\left(\bar{x} - \frac{s(\dots)}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + \frac{s(\dots)}{\sqrt{n}}\right) = \gamma$

оценивает

математическое ожидание генеральной совокупности при большом объеме выборки.

Допишите пропущенный множитель в числителе и объясните его смысл.

Отв. $u_{(1+\gamma)/2}$ – квантиль нормального распределения $N(0,1)$ порядка $(1+\gamma)/2$.

9. Доверительный интервал $P\left(\bar{x} - \frac{su_{(1+\gamma)/2}}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + \frac{su_{(1+\gamma)/2}}{\sqrt{n}}\right) = \gamma$

оценивает математическое ожидание генеральной совокупности при большом объеме выборки. Укажите точность ε (предельную ошибку) оценивания.

Отв. $\varepsilon = \frac{su_{(1+\gamma)/2}}{\sqrt{n}}$.

10. Доверительный интервал

$$P\left(\bar{x} - \frac{st_{(1+\gamma)/2}(n-1)}{\sqrt{n-1}} < m < \bar{x} + \frac{st_{(1+\gamma)/2}(n-1)}{\sqrt{n-1}}\right) = \gamma$$

оценивает математическое ожидание нормальной генеральной совокупности. Укажите точность ε (предельную ошибку) оценивания.

$$\text{Отв. } \varepsilon = \frac{st_{(1+\gamma)/2}(n-1)}{\sqrt{n-1}}.$$

5.3. Теоретические вопросы с ответами

1. Что такое интервальная оценка генеральной числовой характеристики θ ?

Отв. Это – доверительный интервал $P(\theta_1 < \theta < \theta_2) = \gamma$, где

$\theta_1 = \theta_1(x_1, \dots, x_n)$, $\theta_2 = \theta_2(x_1, \dots, x_n)$ – границы интервала, найденные по выборке. γ – доверительная вероятность.

2. Доверительный интервал

$$P\left(s\sqrt{n}/\sqrt{\chi_{(1+\gamma)/2}^2(n-1)} < \sigma < s\sqrt{n}/\sqrt{\chi_{(1-\gamma)/2}^2(n-1)}\right) = \gamma$$

оценивает среднее квадратическое отклонение σ нормальной генеральной совокупности. Укажите смысл величин, стоящих под квадратными корнями.

Отв. Под квадратными корнями стоят квантили распределения хи-квадрат порядка $(1+\gamma)/2$, $(1-\gamma)/2$ соответственно и с $n-1$ степенями свободы.

3. Каким является закон распределения статистики ns^2/σ^2 , построенной по выборке объема n из генеральной совокупности, распределенной по нормальному закону $N(m, \sigma)$?

Отв. Закон хи-квадрат с $n-1$ степенями свободы: $\chi^2(n-1)$.

4. Укажите асимптотический закон распределения статистики $\frac{\bar{x} - M\bar{x}}{\sqrt{D\bar{x}}}$

при $n \rightarrow \infty$, применяя центральную предельную теорему.

Отв. Нормальный закон $N(0,1)$.

5. Напишите t-статистику Стьюдента, применяемую при построении доверительного интервала для генерального математического ожидания.

$$\text{Отв. } t = \frac{\bar{x} - m}{s} \sqrt{n-1}.$$

6. Что такое точность ε (предельная ошибка) и надежность γ статистической оценки $\hat{\theta}$ оцениваемой величины θ ?

Отв. Если имеет место соотношение $P\left(\left|\theta - \hat{\theta}\right| < \varepsilon\right) = \gamma$, то число ε называется точностью (предельной ошибкой), а γ – надежностью оценки $\hat{\theta}$.

7. Доверительный интервал

$$P\left(\bar{x} - \frac{st_{(1+\gamma)/2}(n-1)}{\sqrt{n-1}} < m < \bar{x} + \frac{st_{(1+\gamma)/2}(n-1)}{\sqrt{n-1}}\right) = \gamma$$

оценивает математическое ожидание нормальной генеральной совокупности. Укажите смысл величин, входящих в формулу.

Отв. m – математическое ожидание; \bar{x} – выборочное среднее; s – выборочное среднее квадратическое отклонение; n – объем выборки; $t_{(1+\gamma)/2}(n-1)$ – квантиль распределения Стьюдента порядка $(1+\gamma)/2$ с $n-1$ степенями свободы..

8. Постройте доверительный интервал для генеральной числовой характеристики θ , зная ее точечную оценку $\hat{\theta}$, точность (предельную ошибку) ε и надежность γ этой оценки.

Отв. $P\left(\hat{\theta} - \varepsilon < \theta < \hat{\theta} + \varepsilon\right) = \gamma$.

9. Доверительный интервал $P\left(\bar{x} - \frac{su_{(1+\gamma)/2}}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + \frac{su_{(1+\gamma)/2}}{\sqrt{n}}\right) = \gamma$

оценивает математическое ожидание генеральной совокупности при большом объеме выборки. Объясните смысл величин, входящих в формулу.

Отв. m – математическое ожидание; \bar{x} – выборочное среднее; s – выборочное среднее квадратическое отклонение; n – объем выборки, $u_{(1+\gamma)/2}$ – квантиль нормального распределения $N(0,1)$ порядка $(1+\gamma)/2$.