## § 9. Двумерная случайная величина. Законы распределения

### 9.1. Определения и формулы для решения задач

*Определение 1. Двумерной случайной величиной называется упорядоченная пара* $(X, Y)$ *одномерных случайных величин* $X$ *и* $Y$*. При этом предполагаются определенными вероятности произведения событий* $X < x$ *и* $Y < y$ *для любых вещественных* $x, y$*. Одномерные случайные величины* $X, Y$ *называются компонентами двумерной случайной величины* $(X, Y)$*.*

*Определение 2. Функцией распределения* $F_{XY}(x, y)$ *двумерной случайной величины* $(X, Y)$ *называется вероятность произведения двух событий* $X < x$*,* $Y < y$*, определенная для любых вещественных* $x, y$*:*

$$F_{XY}(x, y) = \mathsf{P}(X < x, Y < y).$$

*Определение 3. Двумерная случайная величина называется дискретной, если множество ее значений* $(x, y)$ *– конечное или счетное.*

Закон распределения вероятностей двумерной дискретной случайной величины $(X, Y)$ можно задать формулой

$$\mathsf{P}(X = x_i, Y = y_k) = p_{ik} \quad (i = 1, \ldots, m; \quad k = 1, \ldots, n).$$

Имеет место условие нормировки

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} p_{ik} = 1$$

*Формулы согласованности* для дискретной случайной величины имеют вид:

$$p_{i\bullet} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik},$$
$$p_{\bullet k} = \sum_{i=1}^{m} p_{ik}.$$

Здесь

$$p_{i\bullet} = \mathrm{P}(X = x_i), \quad i = 1, \ldots, m;$$

$$p_{\bullet k} = \mathrm{P}(Y = y_k), \quad k = 1, \ldots, n$$

– одномерные законы распределения компонент случайной величины. Формулы согласованности позволяют из закона распределения двумерной случайной величины получить одномерные законы распределения ее компонент.

*Определение 4. Двумерная случайная величина называется* *непрерывной, если существует неотрицательная функция* $f_{XY}(x, y)$*, называемая двумерной плотностью вероятности, такая, что вероятность попадания случайной величины* $(X, Y)$ *в область* $D$ *равна двойному интегралу от плотности по области* $D$*:*

$$\mathrm{P}\big((X,Y) \in D\big) = \iint_D f_{XY}(x, y)\, dxdy.$$

Из приведенной формулы следует выражение для функции распределения двумерной непрерывной случайной величины:

$$F_{XY}(x, y) = \mathrm{P}(-\infty < X < x, -\infty < Y < y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(x, y)\, dxdy.$$

формулы согласованности для плотностей:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y)\, dy = f_X(x); \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y)\, dx = f_Y(y)$$

Условие нормировки для плотности:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y)\,dxdy = 1.$$

Двумерное равномерное распределение в области $D$ определяется плотностью

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 1/S_D, & (x, y) \in D; \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Здесь $S_D$ – площадь области $D$.

Двумерное нормальное распределение определяется плотностью

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. -2\rho\frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}.$$

Оно содержит 5 параметров $m_1,\ m_2,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \rho$. Точка $(m_1, m_2)$ называется *центром нормального распределения*. Параметр $\rho$ называется *коэффициентом корреляции*.

$m_1, m_2$ –математические ожидания, $\sigma_1, \sigma_2$ – средние квадратические отклонения компонент *X,Y*.

*Определение 5. Случайные величины $X, Y$ называются независимыми, если независимыми являются события $X < x$ и $Y < y$ для любых вещественных $x,\ y$. В противном случае случайные величины $(X, Y)$ называются зависимыми.*

*Общее необходимое и достаточное условие независимости двух случайных величин:*

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y).$$

*для любых вещественных $x$ и $y$.*

*Необходимое и достаточное условие независимости двух непрерывных случайных величин:*

$$f_{XY}(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y).$$

*Необходимое и достаточное условие независимости двух дискретных случайных величин:*

$$p_{ik}=p_{i\bullet}\cdot p_{\bullet k}$$

*для любых* $i=1,2,\dots,m;\ k=1,2,\dots,n$.

**9.2. Задачи с решениями**

1. Дискретная двумерная случайная величина имеет следующий закон распределения

$$P(X=1;Y=1)=p_{11}=\frac{1}{2},P(X=1;Y=2)=p_{12}=\frac{1}{4},$$
$$P(X=2;Y=1)=p_{21}=\frac{3}{16},P(X=2;Y=2)=p_{22}=\frac{1}{16}.$$

Найти ряд распределения компоненты $X$.

*Решение.* Исходим из формулы

$$P(X=x_i)=p_{i\bullet}=\sum_k p_{ik};i=1,...,m;k=1,...,n.$$

Тогда $P(X=1)=p_{1\bullet}=p_{11}+p_{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4};$

$P(X=2)=p_{2\bullet}=\frac{3}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{4}.$ Отв. $p_{1\bullet}=\frac{3}{4},p_{2\bullet}=\frac{1}{4}.$

2. По условиям задачи 1 найти ряд распределения компоненты $Y$.

*Решение.* Исходим из формулы.

$$P(Y=y_k)=p_{\cdot k}=\sum_i p_{ik}; i=1,\dots,m; k=1,\dots,n.$$

Тогда $P(Y=1)=p_{\cdot 1}=p_{11}+p_{21}=\frac{1}{2}+\frac{3}{16}=\frac{11}{16};$

$$P(Y=2)=p_{\cdot 2}=p_{12}+p_{22}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}.$$

Отв. $p_{\cdot 1}=\frac{11}{16}; p_{\cdot 2}=\frac{5}{16}.$

3. Решить зависимы или независимы компоненты *X, Y* двумерной случайной величины (*X,Y*) в задаче 1.
   *Решение.* Используем необходимое и достаточное условие независимости компонент *X,Y* двумерной случайной величины (*XY*):
   $p_{ik}=p_{i\cdot}p_{\cdot k}; \quad i=1,\dots,m; k=1,\dots,n.$ Здесь $m=n=2.$
   $p_{1\cdot}=\frac{1}{4}; p_{2\cdot}=\frac{3}{4}; p_{\cdot 1}=\frac{11}{16}; p_{\cdot 2}=\frac{5}{16}.$
   $p_{11}=\frac{1}{2}; p_{12}=\frac{1}{4}; p_{21}=\frac{3}{16}; p_{22}=\frac{1}{16}.$

   Проверяем выполнение необходимого и достаточного условия независимости компонент:
   $p_{1\cdot}p_{\cdot 1}=\frac{1}{4}\frac{11}{16}=\frac{1}{64}\neq p_{11}=\frac{1}{2}.$ Это означает, что для всех *i,k* проверяемое условие не выполняется, следовательно компоненты зависимы.
4. Плотность вероятности двумерной случайной величины $(X,Y)$ задана формулами $f_{XY}(x,y)=Cxy$ в квадрате $D=[0\le x\le 1; 0\le y\le 1]$; $f_{XY}(x,y)=0$ вне квадрата $D$. Найдите *C.*
   *Решение*
   Применяем условие нормировки плотности $\iint_D Cxydxdy=1.$ Тогда

   $$C\int_0^1 xdx\int_0^1 ydy=C\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\frac{y^2}{2}\Big|_0^1=C\frac{1}{4}=1.$$

   Отсюда $C=4.$

5. Выполнены условия задачи 4. Найти плотность распределения компоненты *X* при $0 \le x \le 1$. Отв. $f_X(x) = 2x$.

   *Решение.*

   Используем формулу $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy$. Тогда при $0 \le x \le 1$

   $f_X(x) = \int_0^1 4xydy = 4x \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = 2x$. В остальных точках вещественной оси плотность компоненты *X* равна нулю.

6. Выполнены условия задачи 4. Найти плотность распределения компоненты *Y* при $0 \le y \le 1$. Отв. $f_Y(y) = 2y$.

   *Решение.* По симметрии двумерного распределения заключаем, что распределение компоненты *Y* аналогично распределению компоненты *X*. Тогда используем ответ в задаче 5, заменяя переменную *x* на переменную *y*.

   $f_Y(y) = 2y$ при $0 \le y \le 1$. В остальных точках вещественной оси плотность компоненты *Y* равна нулю.

7. Выполнены условия задачи 4. Решить зависимы или независимы компоненты *X, Y* двумерной случайной величины (*X,Y*).

   *Решение.* Применяем необходимое и достаточное условие независимости компонент двумерной случайной величины: для любых *xy* выполняется равенство $f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$.

   В условиях задачи оно выполняется:

   $f_X(x) f_Y(y) = 2x \cdot 2y = 4xy = f_{XY}(xy)$ в квадрате *D*. В остальных точках оно очевидно, так как умножение на нуль дает нуль.

   Отв. Случайные величины *X,Y* независимы.

### *9.3. Задачи для решения*

1. Плотность вероятности двумерной случайной величины $(X,Y)$ задана формулами $f_{XY}(x,y)=x+y$ в квадрате $D=[0\le x\le 1; 0\le y\le 1]$; $f_{XY}(x,y)=0$ вне квадрата $D$. Найдите $f_X(x)$.

   Отв. $f_X(x)=x+\frac{1}{2}$ при $x\in[0;1]$; $f_X(x)=0$ при $x\notin[0;1]$.
2. Плотность вероятности двумерной случайной величины $(X,Y)$ задана формулами $f_{XY}(x,y)=x+y$ в квадрате $D=[0\le x\le 1; 0\le y\le 1]$; $f_{XY}(x,y)=0$ вне квадрата $D$. Найдите $f_Y(x)$.

   Отв. $f_Y(x)=y+\frac{1}{2}$ при
   $y\in[0;1]$; $f_Y(x)=0$ при $y\notin[0;1]$.

   Решение. По симметрии двумерного распределения заключаем, что распределение компоненты *Y* аналогично распределению компоненты *X*. Тогда используем ответ в задаче 4, заменяя переменную *x* на переменную *y*.
3. Решить зависимы или независимы компоненты *X,Y* двумерной случайной величины (*X;Y*) в задаче 4. Отв. Зависимы.

4. Случайные величины $X,Y-$независимы и распределены по показательному закону с параметром $\lambda$ каждая. Напишите плотность вероятности $f_{XY}(x,y)$двумерной случайной величины $(X,Y)$.

   Отв. $f_{XY}(x,y)=\lambda^2 e^{-\lambda x-\lambda y}\ при\ x\ge 0, y\ge 0; f_{XY}(x,y)=0$ в остальных случаях.
5. Дискретные случайные величины $X,Y-$ независимы и равновероятно принимают только значения 0 и 1. Найдите ряд распределения случайной величины $Z=X+Y$.

   Отв. $P(Z=0)=\frac{1}{4}; P(Z=1)=\frac{1}{2}; P(Z=2)=\frac{1}{4}.$
6. Независимые нормальные случайные величины *X,Y* имеют нулевые математические ожидания и единичные дисперсии. Найдите плотность вероятности двумерной случайной величины (*X,Y*).

   Отв. $f_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}$.
7. Независимые нормальные случайные величины *X,Y* имеют единичные математические ожидания и единичные дисперсии. Найдите функцию распределения двумерной случайной величины (X,Y).

Отв. $X,Y\ F_{XY}(x,y)=\Phi(x-1)\Phi(y-1)$, где $\Phi(x)-$функция Лапласа.

8. Двумерная непрерывная случайная величина имеет плотность вероятности $f_{XY}(x,y)=C(1-x)y$ при $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1;\ f_{XY}(x,y)=0$ в остальных случаях. Найти коэффициент $C$. Отв. $C$=4.

9. Двумерная непрерывная случайная величина $(X,Y)$ имеет плотность вероятности $f_{XY}(x,y)$ ту же, что и в задаче 11. Найти плотности распределения компонент $X$ и $Y$.

Отв. $f_X(x)=2(1-x);\ f_Y(y)=2y$ при $0\le x\le 1.\ 0\le y\le 1.$ В остальных точках плотности равны нулю.

10. Двумерная случайная величина $(X,Y)$ распределена равномерно в квадрате $D=[0\le x\le 1;0\le y\le 1]$. Найти плотности распределения ее компонент *X,Y*. Отв. Распределены равномерно на отрезках своего задания.

11. Решить, зависимы или нет компоненты *X,Y* двумерной случайной величины $(X,Y)$ в задаче 10. Отв. Независимы.

12. Двумерная нормальная случайная величина$(X,Y)$ имеет плотность вероятности $f_{XY}(x,y)=\dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{\left[(x-1)^2+(y-1)^2\right]}{2}}$. Решить, зависимы или нет компоненты *X,Y* двумерной случайной величины $(X,Y)$. Отв. Независимы.

8. **4. Теоретические вопросы**

1. Что такое двумерная случайная величина?
2. Что такое двумерная дискретная случайная величина?
3. Что такое двумерная непрерывная случайная величина?
4. Как задать закон распределения дискретной двумерной случайной величины?
5. Что такое функция распределения двумерной случайной величины?

6. Запишите формулу выражающую через функцию распределения $F_{XY}(x, y)$
.

**7.** Как найти функцию распределения $F_{XY}(x, y)$,зная плотность вероятности $f_{XY}(x, y)$?

8. Как найти закон распределения компоненты $Y$, зная функцию распределения $F_{XY}(x, y)$ двумерной случайной величины $(X,Y)$?

9. Как найти функцию распределения компоненты $X$, зная функцию распределения $F_{XY}(x, y)$ двумерной случайной величины $(X,Y)$?

10. Как найти закон распределения компоненты $X$, зная плотность вероятности $f_{XY}(x, y)$ двумерной случайной величины $(X,Y)$?

11. Как найти закон распределения компоненты $Y$, зная плотность вероятности $f_{XY}(x, y)$ двумерной случайной величины $(X,Y)$?

12. Как найти закон распределения компоненты $X$, зная закон $\mathrm{P}(X = x_i, Y = y_i) = p_{ik}$ $(i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n)$ распределения двумерной дискретной случайной величины $(X,Y)$?

13. Чему равно $F_{XY}(x;+\infty)$?

14. Чему равно $F(+\infty; y)$?

15. Как найти вероятность $P((X,Y) \in D)$ попадания двумерной непрерывной случайной величины $(X,Y)$ в область D?

16. Чему равно $F(-\infty; y)$ ?

17. Чему равно $F(x;-\infty)$?

18. Запишите плотность вероятности двумерной непрерывной случайной величины $(X,Y)$, Зная плотности вероятности ее независимых компонент $X,Y$.

Отв. $f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ для любых $x, y$.

19. Запишите функцию распределения двумерной случайной

величины $(X,Y)$, зная функции распределения ее

независимых компонент $X,Y$.

Отв. $F_{XY}(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$ для любых $x,y$.

20. Запишите закон распределения двумерной дискретной случайной величины $(X,Y)$, зная вероятности $p_{i.}=P(X=x_i); i=1,\ldots,m;$ $p_{.k}=P(Y=y_k);\quad k=1,\ldots,n.$ для ее независимых компонент $X,Y$.

Отв. $p_{ik}=p_{i.}p_{.k}\quad \textit{для любых}\ i,k;\quad i=1,\ldots,m; k=1,\ldots,n.$