§ 8. Канонические непрерывные законы распределения.

8.1. Определения и формулы для решения задач

Определение 1. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называется интеграл

$$\mathrm{M}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx .$$

Этот интеграл предполагается абсолютно сходящимся. В противном случае, т. е. когда интеграл расходится или сходится условно, считают, что случайная величина X не имеет математического ожидания.

Дисперсия непрерывной случайной величины выражается формулой

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - m_X\right)^2 f_X\left(x\right) dx .$$

Определение 2. Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется корень из ее дисперсии.

Его обозначения: σ_X, σX, $\sigma[X]$. Таким образом,

$$\sigma_X = \sqrt{D_X} .$$

Начальные и центральные моменты.

Начальным моментом порядка k называется $\mathrm{M}[X^k] = \alpha_k$. Центральным моментом порядка k называется $\mathrm{M}[(X - m_X)^k] = \mu_k$. Математическое ожидание – это начальный момент 1-го порядка. Дисперсия – центральный момент 2-го порядка. Центральные моменты могут быть выражены через начальные. Примером является формула для вычисления дисперсии:

$$\mu_2 = D_X = \mathrm{M}[X^2] - m_X^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 .$$

Определение 3. Модой непрерывной случайной величины называется точка максимума ее плотности вероятности (рис. 6.1).

Определение 4. Медианой ($\mathrm{Me}\,X$, Me*) непрерывной случайной величины называется ее значение, обладающее свойством: вероятности попадания случайной величины* X *левее и правее медианы равны:*

$$\mathsf{P}(X < \mathrm{Me}) = \mathsf{P}(X > \mathrm{Me}).$$

С помощью функции распределения $F(x)$ медиана находится из уравнения

$$F(\mathrm{Me}) = 1/2\,.$$

Если $F(x)$ строго возрастает, то медиана единственна.

Определение 5. Квантилью x_p порядка p называется корень уравнения

$$F\left(x_p\right) = p.$$

Медиана является квантилью порядка $p = \dfrac{1}{2}$.

Нормальное распределение (закон Гаусса).

Случайная величина X называется распределенной *нормально*, если ее плотность вероятности задана формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Параметр m называется *центром*, а параметр σ – *стандартным отклонением* случайной величины

Функция распределения нормального закона выражается формулой

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = 0.5 + \Phi_0\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

Здесь

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\,.$$

– *функция Лапласа*,

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt .$$

– нормированная функция Лапласа.

$$\Phi(x) = 0.5 + \Phi_0(x) .$$

Для нормального закона: $\mathsf{M}\, X = m$; $\mathsf{D}\, X = \sigma^2$;

$$P\left(X \in [a;b]\right) = \Phi_0\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$$

Показательное распределение.

Плотность вероятности показательного закона распределения определяется формулой

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\lambda > 0).$$

Функция распределения для показательного закона выражается формулой

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Числовые характеристики показательного распределения:

$$m_X = \sigma_X = 1/\lambda ;$$

$$\text{Mo} = 0; \quad \text{Me} = (\ln 2)/\lambda \approx 0.693/\lambda .$$

Равномерное распределение.

Случайная величина X называется *равномерно распределенной* на отрезке $[a, b]$, если ее плотность вероятности задана формулой

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Функция распределения $F(x)$ для равномерного закона на отрезке $[a, b]$ выражается формулой

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b; \\ 1, & x>1. \end{cases}$$

Числовые характеристики равномерного распределения на $[a, b]$:

$$m_X = \mathrm{Me} = \frac{a+b}{2};$$

$$D_X = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

8.2. Образцы задач с решениями

1. Напишите плотность вероятности нормальной случайной величины с $Me = 1, D_X = 9.$ Отв. $\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-1)^2}{18}\right].$

Решение

Исходим из формул ; $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$

Отсюда

2. Случайная величина X распределена по показательному закону с $m_X = 2.$ Запишите функцию распределения $F_X(x)$.

Отв. $F(x)=0$ *при* $x<0;$ $F(x)=1-e^{-x/2}$ *при* $x\ge 0.$

Ис ходим из формул. $F(x)=\begin{cases} 0. & x<0 \\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0; \end{cases}$ $m_X = \frac{1}{\lambda} = 2.$

Тогда $F(x)=\begin{cases} 0. & x<0 \\ 1-e^{-\frac{1}{2}x}, & x\ge 0; \end{cases}.$

3. Случайная величина X распределена равномерно на $[0;10]$. Найдите $P(2 \le X \le 5)$. 0тв. 3/10.

Решение

Исходим из формул. $F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b;\\ 1 & x>b\end{cases}$ $a=0,\quad b=10.$

Тогда $F(x)\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{10}, & 0\le x\le 10;\\ 1, & x>10\end{cases}$ $P(2\le x\le 5)=F(5)-F(2)=\dfrac{5}{10}-\dfrac{2}{10}=\dfrac{3}{10}.$

4. Случайная величина X распределена по нормальному закону N(0,1). Выразите $P(|X|<3)$ через нормированную функцию Лапласа $\Phi_0(x)$.

Отв. $2\Phi_0(3)$.

Решение.

Исходим из формул. $F(x)=0,5+\Phi_0\left(\dfrac{x-m}{\sigma}\right);m=0;\sigma=1.$

Тогда $F(x)=0,5+\Phi_0(x);\quad P(|x|<3)=F(3)-F(-3)=\Phi_0(3)-\Phi_0(-3)=$

$=\Phi_0(3)+\Phi_0(3)=2\Phi_0(3).$

5.Случайная величина X распределена по нормальному закону N(4,5).

Вычислить $P(2\le X\le 3)$.

Решение

Исходим из формулы $P(X\in[a;b])$ $=\Phi_0\left(\dfrac{b-m}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\dfrac{a-m}{\sigma}\right).$

Здесь $a=2;b=3;m=4;\sigma=5.$ Тогда

$=-\Phi_0(0,2)+\Phi_0(0,4).$

Используем таблицу значений нормированной функции Лапласа.

$P\left(2\le X\le 3\right)=\Phi_0\left(0,4\right)-\Phi_0\left(0,2\right)=0{,}15542-0{,}07926=0{,}08616$.

8.3. Задачи для решения

1. Напишите плотность вероятности нормальной случайной величины с $m_X=1,\ D_X=4$. Отв. $\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\dfrac{\left(x-1\right)^2}{8}\right]$.

2. Напишите плотность вероятности случайной величины, распределённой по показательному закону с $m_X=2$.

Отв. $f\left(x\right)=0\quad при\quad x<0;\quad f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}e^{-x/2}\quad при\quad x\ge 0.$

3. Найдите медиану показательного распределения с параметром $\lambda=1$.

Отв. $\ln 2$.

4. Случайная величина X распределена нормально с $m_X=1$ и $D_X=4$. Выразите её функцию распределения $F_X(x)$ через функцию Лапласа $\Phi\left(x\right)$.

Отв. $F\left(x\right)=\Phi\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$.

5. Случайная величина X распределена по нормальному закону N(0,1). Запишите ее функцию распределения. Как она связана с нормированной функцией Лапласа $\Phi_0\left(x\right)$?

Отв. $F\left(x\right)=0{,}5+\Phi_0\left(x\right)$.

6. Случайная величина X распределена равномерно на $\left[0;5\right]$. Найдите $P\left(0\le X\le 3\right)$. Отв. $3/5$.

7. Случайная величина X распределена по показательному закону с $m_X=1$. Вычислите $P\left(0\le X\le 1\right)$. Отв. $1-e^{-1}$.

8. Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром $\lambda=2$. Найдите медиану Me. Отв. $\ln 2/2$.

9. Случайная величина X распределена по нормальному закону N(0,1). Выразите $P\left(0\le X\le 1\right)$ через нормированную функцию Лапласа $\Phi_0\left(x\right)$. Отв. $\Phi_0\left(1\right)$.

10. Случайная величина X распределена по нормальному закону N(0,1). Выразите $P(-3 \le X \le 3)$ через нормированную функцию Лапласа $\Phi_0(x)$. Отв. $2\Phi_0(3)$.

11. Случайная величина X распределена по нормальному закону N(0,1). Выразите $P(|X| < 2)$ через нормированную функцию Лапласа $\Phi_0(x)$. Отв. $2\Phi_0(2)$.

12. Найдите вероятность $P(X \in [1;2])$, если X распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 1$. Отв. $e^{-1} - e^{-2}$.

13. Выразите вероятность $P(|X - m| < \sigma)$ для нормальной случайной величины $N(m,\sigma)$ через нормированную функцию Лапласа $\Phi_0(x)$.

Отв. $2\Phi_0(x)$.

14. Выразите вероятность $P(X \in [a;b])$ для нормальной случайной величины $N(m,\sigma)$ через нормированную функцию Лапласа $\Phi_0(x)$.

Отв. $\Phi_0\left(\dfrac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\dfrac{a-m}{\sigma}\right)$.

15.Параметр X детали распределен нормально с $m_X = 2$ и $\sigma_X = 0,01$.

Найти процент деталей, у которых параметр X попадает в промежуток

$1,98 \le X \le 2,01$. Отв. $81,659\% \approx 81,7\%$.

16.Чему равно σ_X для равномерного распределения на промежутке $[0;1]$? Отв. $1/(2\sqrt{3})$.

17. Случайная величина X распределена равномерно на промежутке $[a;b]$. При какой длине промежутка $\sigma_X = 1$? Отв. $2\sqrt{3}$.

18. Напишите плотность вероятности случайной величины, равномерно распределённой на промежутке $[1;3]$.

Отв. $f(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \notin [1;3]; \quad f(x) = 0,5 \quad \text{при} \quad x \in [1;3]$.

19. Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 2.$. Запишите плотность вероятности $f_X(x)$.

Отв. $f(x) = 0 \quad при \quad x < 0; \quad f(x) = 2e^{-2x} \quad при \quad x \geq 0.$

20. Случайная величина X распределена равномерно на $[1; 2]$. Запишите функцию распределения $F_X(x)$.

Отв. $F(x) = 0\ при\ x < 1; F(x) = x - 1\ при\ 1 \leq x \leq 2; F(x) = 1\ при\ x > 2.$

21. Случайная величина X распределена по показательному закону с $m_X = 1/2$. Вычислите $P(0 \leq X \leq 1)$.Отв. $1 - e^{-2}$.

8.4. Теоретические вопросы

1. Запишите формулу для дисперсии непрерывной случайной величины.

2. Что такое мода случайной величины?

3. Что такое медиана случайной величины?

4. Запишите плотность вероятности нормального распределения.

5. Чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной нормально?

1. Запишите плотность вероятности показательного распределения?
2. Чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по показательному закону?
3. Запишите плотность вероятности равномерного распределения.
4. Чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной равномерно на промежутке $[a; b]$?

10. Как выражается функция распределения через функцию Лапласа для нормального распределения?

11. Запишите формулу для функции распределения показательного распределения.

12. Запишите формулу для функции распределения равномерного распределения.

13. Случайные величины X, Y – независимы, причем X распределена по закону $N(m_X, \sigma_X)$ а Y □ по закону $N(m_Y, \sigma_Y)$. Известно, что случайная величина $Z = X + Y$ также имеет нормальное распределение $N(m, \sigma)$. Найдите его параметры m, σ. Отв. $m = m_X + m_Y; \sigma = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$.