

§ 7. Критерии проверки статистических гипотез

Теоретические вопросы с ответами

1. Напишите выражение статистики критерия χ^2 для проверки гипотезы о законе генерального распределения, если параметры закона оцениваются по выборке.
2. Напишите выражение статистики критерия χ^2 для проверки гипотезы о законе генерального распределения, если параметры закона известны.
3. Если гипотеза о законе генерального распределения неверна, то какие значения χ^2 следует ожидать при достаточно больших n ?
4. Как отражается оценивание l параметров проверяемого закона распределения по критерию χ^2 на виде предельного закона χ^2 при $n \rightarrow \infty$? Укажите число степеней свободы предельного закона распределения χ^2 .
5. Когда отвергается выдвинутая гипотеза о законе распределения (на примере критерия χ^2 Пирсона)?
6. Какой вид имеет критическая область критерия χ^2 (при выбранном уровне значимости α и числе степеней свободы критерия r)?
7. Какое заключение делается о справедливости проверяемой гипотезы, если статистика критерия попадает в критическую область?
8. Как связана ошибка 1-го рода при проверке гипотезы с доверительной вероятностью принятия гипотезы?
9. Как формулируется теорема К. Пирсона о распределении статистики критерия χ^2 , применяемой при проверке гипотезы о законе распределения?
10. В статистике $\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$ критерия хи-квадрат, применяемой для проверки гипотезы о генеральном законе распределения, участвуют числа p_i . Что они означают?

11. В статистике $\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$ критерия хи-квадрат, применяемой для проверки гипотезы о законе распределения случайной величины X , участвуют вероятности p_i . Как их найти, зная функцию распределения $F_X(x)$ и промежутки $\Delta_i = [a_{i-1}; a_i)$?
12. В статистике $\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$ критерия хи-квадрат, применяемой для проверки гипотезы о законе распределения случайной величины X , сравниваются вероятности p_i и относительные частоты попадания случайной величины X в промежутки Δ_i . Преобразуйте статистику χ^2 так, чтобы это сравнение было видно.
13. Что такое выборочный эксцесс?
14. Что такое выборочная асимметрия?
15. Какая статистика применяется в критерии проверки равенства дисперсий двух нормальных случайных величин X, Y ?
16. Статистика $F = s_X^2 / s_Y^2$, применяемая при проверке гипотезы о равенстве дисперсий двух нормальных случайных величин X, Y , распределена по закону 1) Стьюдента, 2) Фишера, 3) хи-квадрат, 4) нормальному, 5) нет правильного ответа. Укажите номер правильного ответа.
17. Для проверки гипотезы о равенстве дисперсий двух нормальных случайных величин X, Y используются выборки объемами m и n соответственно и статистика $F = s_X^2 / s_Y^2$. Укажите закон распределения статистики F и числа его степеней свободы.
18. Опишите, как проверяется гипотеза о равенстве вероятностей p_A, p_B двух событий A, B с помощью доверительного для p_A :
 $P(p_A^* - \varepsilon < p_A < p_A^* + \varepsilon) = \gamma$ и относительной частоты p_B^* .
19. Опишите, как проверяется гипотеза о равенстве математических ожиданий m_X, m_Y двух нормальных случайных величин X, Y с помощью доверительного интервала для m_X :
 $P(\bar{x} - \varepsilon < m_X < \bar{x} + \varepsilon) = \gamma$ и выборочного среднего \bar{y} .
20. Проверяется гипотеза H_0 о генеральном законе распределения с помощью критерия хи-квадрат. Известны выборочное значение χ_e^2

статистики хи-квадрат и квантиль $\chi^2_{1-\alpha}(r)$ закона хи-квадрат порядка $1-\alpha$ с r степенями свободы статистики хи-квадрат, где α – принятый уровень значимости. В каком случае принимается и в каком случае отвергается гипотеза H_0 ?

Ответы к теоретическим вопросам

1. $\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n \hat{p}_i)^2}{n \hat{p}_i}$. Здесь n_i – частоты; \hat{p}_i – оценки вероятностей попадания элементов выборки в промежутки Δ_i группированного статистического ряда; k – число промежутков; n – объем выборки.
2. $\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$. Здесь n_i – частоты; p_i – вероятности попадания элементов выборки в промежутки Δ_i группированного статистического ряда; k – число промежутков; n – объем выборки.
3. χ^2 будет достаточно большим, попадающим в критическую область.
4. $r = k - l - 1$, где k – число слагаемых статистики критерия, l – число оцененных параметров.
5. Если выборочное значение χ^2 попадает в критическую область, гипотеза отвергается.
6. $[\chi^2_{1-\alpha}(r); \infty)$, где $\chi^2_{1-\alpha}(r)$ квантиль распределения χ^2 порядка α и с r степенями свободы.
7. Гипотеза отвергается на принятом уровне значимости.
8. Вероятность ошибки 1-го рода $\alpha = 1 - \gamma$.
9. Статистика критерия χ^2 асимптотически при $n \rightarrow \infty$ распределена по закону χ^2 с $k - 1$ степенями свободы, где k – число слагаемых статистики.
10. $p_i = P(X \in \Delta_i); (i = 1, \dots, k)$, где Δ_i – промежутки, на которые разбита ось абсцисс
11. $p_i = F(a_i) - F(a_{i-1})$.
12. $\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{n}{p_i} \left(\frac{n_i}{n} - p_i \right)^2$.

13. $E = \frac{m_4}{s^4} - 3$, где m_4 – 4-й выборочный центральный момент, s^2 – выборочная дисперсия.

14. $A = m_3/s^3$, где m_3 – выборочный 3-й центральный момент, s – выборочное среднее квадратическое отклонение.

15. $F = s_x^2/s_y^2$, где s_x^2, s_y^2 – исправленные выборочные дисперсии X, Y .

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2; s_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2.$$

16.2.

17. $F(m-1, n-1)$ – закон Фишера с $m-1$ и $n-1$ степенями свободы.

18. Если p_B^* попадает в доверительный интервал для p_A , то гипотеза принимается, в противном случае – отвергается.

19. Сначала проверяется гипотеза о равенстве дисперсий D_X, D_Y . Если она принимается, то проверяется попадание \bar{y} в доверительный интервал для m_X . При попадании \bar{y} в этот интервал гипотеза о равенстве m_X, m_Y принимается с доверительной вероятностью γ . В противном случае гипотеза отвергается. Если гипотеза о равенстве дисперсий D_X, D_Y отвергается, то гипотезу о равенстве m_X, m_Y этим способом проверять нельзя.

20. Если $\chi_6^2 < \chi_{1-\alpha}^2(r)$ – гипотеза H_0 принимается, при $\chi_6^2 \geq \chi_{1-\alpha}^2(r)$ – отвергается.