## § 4. Методы получения оценок.

### 4.1. Определения и формулы для решения задач

*Метод моментов*

Имеется выборка $(x_1, \dots, x_n)$ из исследуемой генеральной совокупности. На ее основе вычисляются $m$ начальных моментов $a_1, \dots, a_m$. Так как вид генерального закона известен, то, следовательно, можно найти $m$ первых начальных генеральных моментов $\alpha_1(\theta_1, \dots, \theta_m)$, $\dots$, $\alpha_m(\theta_1, \dots, \theta_m)$, которые выражаются через неизвестные параметры. Выборочные и генеральные моменты одинакового порядка приравниваются:

$$\begin{cases} \alpha_1(\theta_1, \dots, \theta_m) = a_1, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \alpha_m(\theta_1, \dots, \theta_m) = a_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Получили систему $m$ уравнений с неизвестными величинами $\theta_1, \dots, \theta_m$. Решение $(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_m)$ этой системы дает оценки $\hat{\theta}_i = \hat{\theta}_i(x_1, \dots, x_n)$ неизвестных параметров $\theta_i$ $(i = 1, \dots, m)$.

### 4.2. Задачи для решения с ответами

1. Найдите оценки параметров нормального распределения по методу моментов.

   Отв. $\hat{m} = \bar{x}$; $\hat{\sigma} = s$.

   *Решение.*

Для нормального закона $N(m, \sigma)$ известно, что $\alpha_1 = \mathrm{M}X = m$;

$\mu_2 = \mathrm{M}\left[(X - m_X)^2\right] = \sigma^2$. Для этого случая удобно взять первый

начальный и второй центральный моменты. Получаем систему из двух уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_1, \\ \mu_2 = m_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \bar{x}, \\ \sigma^2 = s^2. \end{cases}$$

Находим оценки двух параметров по методу моментов:

$$\hat{m} = \bar{x}; \quad \hat{\sigma} = s.$$

2. Найдите оценку параметра $\lambda$ показательного распределения методом моментов.

   Отв. $\hat{\lambda} = 1/\bar{x}$.

*Решение.*

Для показательного закона с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

известно, что $\alpha_1 = \mathrm{M}X = 1/\lambda$. Так как $a_1 = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, то система (1) в этом случае сводится к одному уравнению $1/\lambda = \bar{x}$, из которого находим

$$\hat{\lambda} = 1/\bar{x}.$$

3. Найдите оценку параметра закона Пуассона методом моментов.

   Отв. $\hat{a} = \bar{x}$.

   Решение.

   Для закона Пуссона

   $$P(X = k) = \frac{a^k}{k!}e^{-a}; \quad k = 1, 2, \ldots$$

   известно, что первый начальный момент есть математическое ожидание $m{=}a$, равное параметру закона Пуассона.

   Тогда система (1) сводится к одному уравнению

   $m = a = a_1 = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Отсюда следует ответ.

4. Найдите оценку параметра $p$ геометрического распределения методом моментов.

   Отв. $\hat{p} = \dfrac{1}{\overline{x}}$.

   Решение.

   Для геометрического распределения

   $P\left(X = k\right) = pq^{k-1}; \quad k = 1, 2, \ldots$

   известно, что первый начальный момент есть математическое

   ожидание $m$, равное $\dfrac{1}{p}$. Тогда система (1) сводится к одному

   уравнению

   $$m = \frac{1}{p} = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$ . Отсюда следует ответ.

## 4.3. Теоретические вопросы с ответами

1. В чем состоит метод моментов оценки параметров закона распределения?

   Отв. Приравниваются выборочные и генеральные моменты в количестве, равном числу неизвестных параметров. Из полученной системы уравнений находим неизвестные параметры. Например,

   $\alpha_1\left(\theta_1, \ldots, \theta_m\right) = a_1, \ldots, \alpha_m\left(\theta_1, \ldots, \theta_m\right) = a_m$.
2. Какое свойство имеют оценки параметров закона распределения, найденные методом моментов, которое оправдывает их роль, как оценок.

   Отв. Состоятельность.
3. В чем состоит метод максимума правдоподобия оценки параметров закона распределения? Рассмотрите случай одного параметра.

Отв. Оценка неизвестного параметра генеральной плотности $f(x,\theta)$ находится из уравнения правдоподобия $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$, как решение этого уравнения, зависящее от выборочных элементов.

4. Запишите функцию правдоподобия для закона распределения, заданного плотностью $f(x,\theta)$.

   Отв. $L = f(x_1,\theta)...f(x_n.\theta)$. Здесь $(x_1,...,x_n)$ – выборка.

5. Напишите функцию правдоподобия для показательного распределения.

   Отв. $L = \lambda e^{-\lambda x_1}...\lambda e^{-\lambda x_n} = \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$.

6. Запишите уравнение правдоподобия для нахождения оценки $\hat{\theta}$ параметра $\theta$ плотности вероятности $f(x,\theta)$.

   Отв. $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\ln\left(f(x_1,\theta)...f(x_n,\theta)\right)\right] = \frac{f'_\theta(x_1,\theta)}{f(x_1,\theta)} + ... + \frac{f'_\theta(x_n,\theta)}{f(x_n,\theta)} = 0.$

7. Укажите оценки максимального правдоподобия параметров $a,b$ равномерного распределения на промежутке $[a;b]$.

   Отв. $\hat{a} = x_{\min}$; $\hat{b} = x_{\max}$.

8. Какую роль играет функция правдоподобия при оценивании параметра $\theta$ генеральной плотности вероятности $f(x,\theta)$?

   Отв. С помощью функции правдоподобия составляется уравнение правдоподобия $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$, из которого находится оценка $\hat{\theta}$, как решение этого уравнения, зависящее от выборочных элементов.

9. Запишите систему уравнений правдоподобия для нахождения оценок двух параметров генеральной плотности вероятности $f(x,\theta_1,\theta_2)$.

   Отв. $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_1} = 0$, $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_2} = 0$.

10. Какие свойства имеют оценки параметров закона распределения, найденные методом максимума правдоподобия?

    Отв. Состоятельность и асимптотическая эффективность.

11. Укажите оценки максимального правдоподобия для параметров нормального закона распределения.

    Отв. $\hat{m} = \overline{x}$; $\left(\hat{\sigma}^2\right) = s^2$.

12. Укажите оценку максимального правдоподобия параметра $\lambda$ показательного распределения.

Отв. $\hat{\lambda} = 1/\bar{x}$.

13. В чем состоит метод аналогии (подстановки) образования выборочных точечных оценок генеральных числовых характеристик?
Отв. Изучаемая случайная величина X аппроксимируется дискретной случайной величиной $X^*$, принимающей выборочные значения $x_i$ $(i = 1,...,n)$ с одной и той же вероятностью $1/n$. Числовые характеристики случайной величины $X^*$ являются оценками аналогичных числовых характеристик случайной величины X.
14. Укажите выборочную оценку генерального математического ожидания $m_X$, по методу аналогии.
Отв. $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
15. Укажите выборочную оценку генеральной дисперсии по методу аналогии.
Отв. $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$.
16. Пользуясь методом аналогии, укажите выборочную оценку генерального начального момента порядка $k$.
Отв. $a_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$.
17. Пользуясь методом аналогии, укажите выборочную оценку генерального центрального момента порядка $k$.
Отв. $m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^k$.