§ 11. n-мерная случайная величина.

Теоретические вопросы

1. Укажите необходимое и достаточное условие взаимной независимости случайных величин X_1, X_2, X_3, зная их плотности вероятности
2. Укажите необходимое и достаточное условие взаимной независимости случайных величин X_1, X_2, X_3, зная их функции распределения.
3. Что такое n-мерная случайная величина?
4. Запишите функцию распределения непрерывной трёхмерной случайной величины, зная её плотность вероятности.
5. Запишите ковариационную матрицу для трехмерной случайной величины (X_1, X_2, X_3).
6. Укажите условие взаимной независимости n случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, зная их функции распределения.
7. Укажите условие взаимной независимости n случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, зная их плотности вероятности.
8. Сколько в общем случае различных элементов у ковариационной матрицы трехмерной случайной величины? Обоснуйте ответ.
9. Что такое функция распределения *n*-мерной случайной величины?
10. Запишите формулу, выражающую дисперсию суммы взаимно независимых случайных величин через дисперсии слагаемых.
11. Как вычислить вероятность $P((X_1, X_2, \ldots, X_n) \in D)$ попадания *n*-мерной непрерывной случайной величины $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ в *n*-мерную область D ?
12. Что такое центр распределения *n*-мерной случайной величины?
13. Как вычислить вероятность $P((X_1, X_2, X_3) \in D)$ попадания 3-х мерной непрерывной случайной величины (X_1, X_2, X_3) в 3-х мерную область *D*?
14. Запишите ковариационную матрицу для 3-х мерной случайной величины с взаимно независимыми компонентами.
15. Сформулируйте определение 3-х мерной случайной величины.
16. Приведите пример реальной 3-х мерной непрерывной случайной величины.
17. Приведите пример реальной 3-х мерной дискретной случайной величины.

18. Приведите пример реальной *n*- мерной непрерывной случайной величины.
19. Приведите пример реальной *n*-мерной дискретной случайной величины.
20. Какие числовые характеристики стоят на главной диагонали ковариационной матрицы *n*-мерной случайной величины $\left(X_1,\ldots,X_2\right)$? Объясните их вероятностный смысл.

Ответы к теоретическим вопросам

1. $f_{X_1X_2X_3}\left(x_1,x_2,x_3\right)=f_{X_1}\left(x_1\right)f_{X_2}\left(x_2\right)f_{X_3}\left(x_3\right)$ для любых x_1,x_2,x_3.
2. $F_{X_1X_2X_3}\left(x_1,x_2,x_3\right)=F_{X_1}\left(x_1\right)F_{X_2}\left(x_2\right)F_{X_3}\left(x_3\right)$ для любых x_1,x_2,x_3.
3. n-мерной случайной величиной называется система n одномерных случайных величин
   $X_1,X_2,\ldots,X_n$. Предполагается, что существует вероятность произведения
   n

   событий $X_1<x_1,\ldots,X_n<x_n$ для любых x_1,x_2,x_3.
4. $F_{X_1X_2X_3}=\int\limits_{-\infty}^{x_1}\int\limits_{-\infty}^{x_2}\int\limits_{-\infty}^{x_3}f_{X_1X_2X_3}\left(t_1,t_2,t_3\right)dt_1dt_2dt_3.$
5. $\begin{pmatrix} D_1 & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & D_2 & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & D_3 \end{pmatrix}$ Здесь D_i – дисперсия $X_i;(i=1,2,3);$ K_{ij} – ковариация
   случайных величин $X_i,X_j;i\neq j.$
6. $F_{X_1\ldots X_n}\left(x_1,\ldots,x_n\right)=F_{X_1}\left(x_1\right)\ldots F_n\left(x_n\right)$ для любых $x_1,\ldots.,x_n$.
7. $f_{X_1\ldots X_n}\left(x_1,\ldots,x_n\right)=f_{X_1}\left(x_1\right)\ldots f_n\left(x_n\right)$ для любых $x_1,\ldots.,x_n$.
8. 6. По главной диагонали матрицы стоят в общем случае 3 различные дисперсии, а остальные 6 элементов – ковариации, попарно равные: $K_{ij}=K_{ji}$.
9. $F_{X_1\ldots X_n}\left(x_1,\ldots,x_n\right)=P\left(X_1<x_1,\ldots,X_n<x_n\right).$
10. $D\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}DX_i.$
11. $P((X_1,\ldots,X_n)\in D)=\int\ldots\int f_{X_1\ldots X_n}(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n$
    D

12. Точка $(MX_1,\ldots,MX_n)$

13. $P\left(\left(X_1, X_2, X_3\right) \in D\right) = \iiint\limits_D f_{X_1 X_2 X_3}\left(x_1, x_2, x_3\right) dx_1 dx_2 dx_3.$

14. $\begin{pmatrix} DX_1 & 0 & 0 \\ 0 & DX_2 & 0 \\ 0 & 0 & DX_3 \end{pmatrix}.$

15. Трехмерной случайной величиной $\left(X, Y, Z\right)$ называется система трех случайных величин $X, Y, Z.$ Предполагается существующей вероятность произведения трех событий $X < x, Y < y, Z < z$ для любых *x,y,z.*

16. Абсцисса, ордината, аппликата точки разрыва зенитного снаряда.

17. Количество отличных оценок у студентов на экзамене в трех группах потока по одной и той же дисциплине.

18. Результаты n измерений одной и той же величины.

19. Количество бракованных деталей в n партиях одной и той же продукции.

20. Дисперсии компонент $DX_1, \ldots, DX_n.$ Характеризуют рассеяние компонент.