§ 7. Одномерная непрерывная случайная величина.

Задачи с заданием плотности и функции распределения

7.1. Определения и формулы для решения задач

Определение. Случайная величина X называется непрерывной, если существует неотрицательная функция $f(x)$, называемая плотностью распределения вероятности, такая, что вероятность попадания случайной величины в промежуток $[a, b]$ равна определенному интегралу от плотности по этому промежутку:

$$\mathsf{P}(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Функция распределения непрерывной случайной величины выражается формулой

$$F(x) = \mathsf{P}(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\,.$$

Плотность вероятности подчинена условию нормировки $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

С помощью функции распределения удобно находить вероятности

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a).$$

Определение 1. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называется интеграл

$$\mathsf{M}\,X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx\,.$$

Этот интеграл предполагается абсолютно сходящимся. В противном случае, т. е. когда интеграл расходится или сходится условно, считают, что случайная величина X не имеет математического ожидания.

7.2. Образцы задач с решениями

1. $f_X(x)=\begin{cases} cx, 1\le x\le 2; \\ 0, \quad x\notin[1;2]. \end{cases}$ Найдите C. Отв. 2/3.

Решение. Применяем свойство нормировки плотности:

$$\int_1^2 Cxdx = C\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = C\left(2-\frac{1}{2}\right) = C\frac{3}{2} = 1.$$ Отсюда $C=\frac{2}{3}$.

2. $f_X(x)=\begin{cases} 0,5x, x\in[0;2]; \\ 0, \quad x\notin[0;2]. \end{cases}$ Найдите вероятность $\mathrm{P}(1\le X\le 3)$. Отв. 3/4.

Решение. По определению непрерывной случайной величины

$$P(1\le X\le 3)=\int_1^2 0,5xdx = 0,5\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 0,5\cdot 2 = 1.$$

3. $f_X(x)=\begin{cases} 0,5x^2, x\in[0;2]; \\ 0, \quad x\notin[0;2]. \end{cases}$ Найдите m_X. Отв. 2.

Решение. По определению математического ожидания

$$m_X = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx = \int_0^2 x\cdot 0,5x^2dx = 0,5\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = 0,5\cdot 4 = 2.$$

4. $f(x)=2\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^3}$. Найдите $F(x)$.

Решение. По определению функции распределения

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx = 2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^3}dx = 2\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+e^x\right)^{-3}d\left(1+e^x\right)=$$

$$=-2\frac{1}{2}\left(1+e^x\right)^{-2}\Big|_{-\infty}^{x} = 1-\left(1+e^x\right)^{-2}.$$

7.3. Задачи для решения

1. $f_X(x)=\begin{cases}0,25x, x\in[1;3];\\ 0, x\notin[1;3].\end{cases}$ Найдите $\mathrm{P}(0\le X\le 2)$. Отв. 3/8.

2. $f_X(x)=\begin{cases}cx^2, x\in[1;3];\\ 0, \quad x\notin[1;3].\end{cases}$ Найдите c. Отв. 3/26.

3. $f_X(x)=\begin{cases}0,5x, x\in[0;2];\\ 0, \quad x\notin[0;2].\end{cases}$ Найдите m_X. Отв. 4/3.

.

4. $f_X(x)=\begin{cases}cx, x\in[0;1];\\ 0, \quad x\notin[0;1].\end{cases}$ Найдите C. Отв. 2.

5. $f_X\left(x\right)=\begin{cases}2x, \quad x\in\left[0;1\right]\\ 0, \quad x\notin\left[0;1\right]\end{cases}$; Найдите $F_X(x)$. Отв.

$F\left(x\right)=0 \text{ } при \text{ } x<0; F\left(x\right)=x^2 \text{ } при \text{ } 0\le x\le 1; F\left(x\right)=1 \text{ } при \text{ } x>1.$

6. $f_X\left(x\right)=\begin{cases}4x^3, x\in\left[0;1\right]\\ 0, x\notin\left[0;1\right]\end{cases}$. Найдите $F_X\left(\frac{1}{2}\right)$. Отв. 1/16.

7. $f\left(x\right)=\dfrac{C}{1+x^2}$. Найдите С. Отв. $1/\pi$.

8. $f_X(x)=\begin{cases}3x^2, x\in[0;1];\\ 0, x\notin[0;1].\end{cases}$ Найдите $F_X\left(\frac{1}{2}\right)$. Отв. 1/16.

9. $f_X(x)=\begin{cases}0,25x, x\in[1;3];\\ 0, x\notin[1;3].\end{cases}$ Найдите m_X. Отв. 13/6.

10. $F\left(x\right)=Carctgx+\dfrac{1}{2}$. Найдите С. Отв. $1/\pi$.

11. $f\left(x\right)=\dfrac{C}{1+x^2}$ при $x\in\left[0;1\right]$. $f\left(x\right)=0$ при $x\notin\left[0;1\right]$. Найдите С. Отв. $4/\pi$.

12. $f_X\left(x\right)=\begin{cases}4x^3, x\in\left[0;1\right]\\ 0, x\notin\left[0;1\right]\end{cases}$. Найдите m_X. Отв. 4/5.

13. $f\left(x\right)=\begin{cases}Cx^4; x\in\left[0;1\right]\\ 0; x\notin\left[0;1\right]\end{cases}$. Найдите С. Отв. 5.

14. $f\left(x\right)=\begin{cases}5x^4; x\in\left[0;1\right]\\ 0; x\notin\left[0;1\right]\end{cases}$. Найдите m_X . Отв. 5/6.

15. $f\left(x\right)=\dfrac{1/\pi}{1+x^2}$. Вычислите $P\left(0\le X\le 1\right)$. Отв. 1/4.

16. $f\left(x\right)=\begin{cases}5x^4; x\in\left[0;1\right]\\ 0; x\notin\left[0;1\right]\end{cases}$. Вычислите $P\left(\dfrac{1}{2}\le X\le 2\right)$. Отв. 31/32.

17. $f_X(x)=\begin{cases}3x^2, x\in[0;1];\\ 0, x\notin[0;1].\end{cases}$ Вычислите $M\left[X^2\right]$. Отв. 3/5.

18. $f_X\left(x\right)\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$. . Найдите $F_X\left(x\right)$. Отв. $F_X\left(x\right)\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

19. $f_X\left(x\right)=1/\left(x+1\right)\,при\;x\in\left[0;1\right];\;f_X\left(x\right)=0\;при\;x\notin\left[0;1\right]$.
Найдите $F_X\left(x\right)$. Отв.

$$F_X\left(x\right)=0 при x<0; F_X\left(x\right)=\ln\left(x+1\right)/\ln 2 при x\in\left[0;1\right]; F_X\left(x\right)=1 при x>0.$$

20. $F_X\left(x\right)=e^x/\left(e^x+1\right)$. Найдите $f_X\left(x\right)$. Отв. $f_X\left(x\right)\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$.

7.4. Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение непрерывной случайной величины.

2. Запишите формулу для математического ожидания непрерывной случайной величины.

3. Как выражается функция распределения через плотность вероятности?

4. Как выражается через плотность вероятности через функцию распределения?

5. Как найти вероятность $P\left(a\le X\le b\right)$, зная функцию распределения?

6. Как найти вероятность $P(a \leq X \leq b)$, зная плотность вероятности?

7. Какой нормировке подчинена плотность вероятности?

8. Чему равна разность $F(+\infty) - F(-\infty)$?

9. Чему равна вероятность события $X = c$ (с – число) для непрерывной случайной величины?

10. Укажите свойства плотности вероятности.

11. Укажите свойства функции распределения.

12. Почему графики плотностей $y = f_1(x)$ *и* $y = f_2(x)$ не могут полностью располагаться один под другим?