§ 6. Одномерная дискретная случайная величина и ее числовые характеристики

6.1. Определения и формулы для решения задач

Определение 1.

Случайной величиной X *называется числовая функция, определенная на пространстве элементарных событий* Ω*, которая каждому элементарному событию* ω *ставит в соответствие некоторое число.*

При этом предполагаются определенными вероятности событий $X < x$ для любых вещественных чисел x.

Таким образом, случайная величина – это вещественная переменная X, значения которой определяются исходами эксперимента E. Значения случайной величины – случайные числа.

Определение 2.

Законом распределения случайной величины называется любое правило, указывающее вероятности отдельных значений случайной величины или множества этих значений.

Определение 3. Функцией распределения случайной величины X *называется функция* $F_X(x)$*, которая для любого вещественного числа* x *равна вероятности события* $X < x$.

Таким образом, по определению

$$F_X(x) = \mathsf{P}(X < x).$$

Определение 4. Случайная величина называется дискретной, иначе – дискретного типа, если множество ее значений может быть занумеровано натуральными числами (т. е. оно конечное или счетное).

Закон распределения дискретной случайной величины удобно задать с помощью формулы

$$p_k = \mathsf{P}(X = x_k), \quad k = 1, 2, \dots ,$$

Последовательность пар (x_1, p_1), (x_2, p_2), $\dots$ образует так называемый *ряд распределения*.

В случае конечного числа значений ряд распределения удобно оформить в виде *таблицы распределения*:

X	x_1	x_2	...	...	x_n
P	p_1	p_2	...	...	p_n

Определение 5. Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений значений данной величины на вероятности этих значений.

$$\mathrm{M}\,X = \sum_k x_k p_k\,.$$

Определение 6. Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от математического ожидания.

$$\mathrm{D}\,X = \mathrm{M}\left[(X - m_X)^2\right] = \mathrm{M}\left[\overset{\circ}{X}{}^2\right];$$

$$\mathrm{D}\,X = \sum_k (x_k - m_X)^2 p_k\,.$$

Формула для вычисления дисперсии

$$D_X = \mathrm{M}[X^2] - m_X^2\,.$$

При этом $\mathrm{M}[X^2]$ вычисляется по формуле

$$\mathrm{D}[X^2] = \sum_k x_k^2 p_k\,.$$

Определение 7. Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется корень из ее дисперсии.

$$\sigma_X = \sqrt{D_X}\,.$$

Определение 8. Модой дискретной случайной величины называется её значение, принимаемое с наибольшей вероятностью по сравнению с двумя соседними значениями. Обозначения моды: Mo; $\mathrm{Mo}\,X$.

Биномиальное распределение.

Биномиальный закон распределения определяется формулой

$$\mathrm{P}(X=k)=P_{n,k}=C_n^k p^k q^{n-k},$$

$$k=0,1,\ldots,n;\ 0<p<1;\ q=1-p;$$

$C_n^k=\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний из n по k. Случайная величина X, распределенная по биномиальному закону, является числом появлений события A (успехов) с вероятностью p в схеме Бернулли проведения n независимых испытаний.

$$m_X=np;\ \ D_X=npq.$$

Распределение Пуассона.

Закон распределения Пуассона определяется формулой

$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{a^k}{k!}e^{-a};$$

$k=0,1,2,\ldots;\ a>0;\ a$ – параметр распределения.

$$m_X=D_X=a.$$

Геометрическое распределение.

Геометрическое распределение определяется формулой

$$\mathrm{P}(X=k)=pq^{k-1},$$

$k=1,2,\ldots;\ 0<p<1;\ q=1-p.$

Случайная величина X, распределенная по геометрическому закону, является числом независимых испытаний до первого появления события A (успеха), которое в каждом испытании появляется с вероятностью p. Такая схема испытаний и сам закон распределения называются *геометрическими*, так как вероятности (5.8) являются членами геометрической прогрессии.

$$m_X=1/p,\ D_X=q/p^2.$$

6.2. Образцы задач с решениями

1. X, Y – независимы, $D_X = 1$, $D_Y = 2$. Найдите $\mathrm{D}[2X+Y]$. Отв. 6.

Решение. Применим свойства дисперсии. Для двух независимых случайных величин дисперсия их суммы равна сумме дисперсий слагаемых.

Постоянный множитель можно вынести за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат. Тогда

$$D\left[2X+Y\right] = D\left[2X\right] + D\left[Y\right] = 4D\left[X\right] + D\left[Y\right] = 4\cdot 1 + 2 = 6.$$

2. Случайная величина X распределена по закону Пуассона с параметром $a=1$. Вычислите $P\left(X=2\right)$. Отв. $0{,}5e^{-1}$.

Решение. Используем формулу, определяющую закон Пуассона:

$P\left[X=k\right] = \dfrac{a^k}{k!}e^{-a}$. Здесь a=1; k=2. Тогда $P\left[X=2\right] = \dfrac{1^2}{2!}e^{-1} = \dfrac{1}{2}e^{-1}$.

3. Случайная величина X распределена по геометрическому закону с параметром $p = \dfrac{1}{2}$. Найдите $\mathrm{M}[2X+1]$. Отв. 5.

Решение. Используем свойства математического ожидания и формулу, выражающую параметр p геометрического закона распределения с математическим ожиданием.

$$M\left[X\right] = \frac{1}{p}; \qquad M\left[2X+1\right] = 2M\left[X\right] + 1 = 2\frac{1}{p} + 1 = 2\cdot 2 + 1 = 5.$$

4. Случайная величина X распределена по биномиальному закону с параметрами $n=4; p=\dfrac{1}{3}$. Найдите $D\left[2X+1\right]$. Отв. 32/9.

Решение. Используем формулу, связывающую параметры биномиального закона распределения с дисперсией: $D\left[X\right] = npq = 4\cdot\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{8}{9}$.

Также применяем свойства дисперсии, упомянутые в решении первой задачи.

Тогда $D[2X+1]=4D[X]+D[1]=4\cdot\frac{8}{9}+0=\frac{32}{9}.$

Учитываем при этом, что дисперсия константы равна нулю.

6.3. Задачи для решения

1. Случайная величина X задана рядом распределения $P[X=1]=\frac{1}{4};P[X=2]=\frac{1}{3};P[X=3]=\frac{5}{12}$. Найдите $\mathrm{M}[X^2]$. Отв. 16/3.

2. X – число появлений события A при 10 испытаниях по схеме Бернулли. $\mathrm{P}(A)=1/4$ в каждом испытании. Чему равно $\mathrm{M}X$? Отв. 2,5.

3. Что такое мода одномерной дискретной случайной величины? Укажите моду для ряда распределения P(X=1)=1/16, P(X=2)=1/8, P(X=3)=1/2, P(X=4)=1/8, P(X=5)=1/8, P(X=6)=1/16.
Отв. 3.

4. Как выразить дисперсию случайной величины через начальные моменты 1-го и 2-го порядков? Вычислите D_X, если $M\left[X^2\right]=6, \bar{x}=2.$ Отв. 2.

5. Вычислите D_X для случайной величины, заданной рядом распределения $P[X=1]=\frac{1}{4};P[X=2]=\frac{1}{3};P[X=3]=\frac{5}{12}$. Отв. 23/36 .

6. Случайная величина X задана рядом распределения $P[X=1]=\frac{1}{4};P[X=2]=\frac{1}{3};P[X=3]=\frac{5}{12}$. Вычислите m_X . Отв. 13/6.

7. Известны $m_X=2$ и $M\left[X^2\right]=11$. Вычислите среднее квадратическое отклонение σ. Отв. 3.

8. X,Y – независимые случайные величины, причем $\sigma_X=3,\sigma_Y=4.$ Найдите σ_{X+Y}.
Отв. 5.

9. X,Y – независимые случайные величины, причем $DX=DY=1.$ Найдите $D[X-Y]$.
Отв. 2.

10. $MX=1;M\left[X+2Y\right]=5.$ Найдите MY. Отв. 2.

11. X – число появлений события A при 10 испытаниях по схеме Бернулли. $\mathrm{P}(A)=1/4$ в каждом испытании. Чему равно $\mathrm{M}X$? Отв. 2,5.

12. Испытания прибора проводятся независимо до первого отказа. Вероятность отказа при одном испытании равна 0,1. Найдите математическое ожидание числа X проведенных испытаний. Отв. 10.

13. Испытываются независимо 10 одинаковых приборов. Вероятность выхода из строя каждого прибора при испытании равна 0,1. Укажите среднее число m_X вышедших из строя приборов. Отв. 1.

14. Случайная величина X распределена по биномиальному закону с параметрами $n=5; p=1/2$. Найдите $M[2X+3]$. Отв. 8.

15. Случайная величина X распределена по геометрическому закону с параметром $p=1/2$. Найдите $M[2X+1]$. Отв. 5.

16. Вычислите $D[2X]$, если $M\left[X^2\right]=12$, $m_X=3$. Отв. 12.

17. Случайная величина X распределена по закону Пуассона с параметром $a=2$. Найдите $D[2X+3]$. Отв. 8.

18. Случайная величина X распределена по биномиальному закону с параметрами $n=5; p=1/2$. Найдите D_X. Отв. 5/4.

19. Случайная величина X распределена по закону Пуассона с параметром $a=2$. Найдите $D[3X]$.

Отв. 18.

20. Случайная величина X распределена по биномиальному закону с параметрами $n=5; p=1/2$. Найдите $D[2X]$. Отв. 5.

21. Случайная величина X распределена по геометрическому закону с параметром $p=1/2$. Найдите D_X. Отв. 2.

22. Случайная величина X распределена по геометрическому закону с параметром $p=1/2$. Найдите среднее квадратическое отклонение σ.

Отв. $\sqrt{2}$.

23. Случайные величины X_1, X_2 распределены одинаково по биномиальному закону с параметрами $n=10, p=1/2$.
Найдите $M\left[X_1+X_2\right]$. Отв. 10.

24. Независимые случайные величины X_1, X_2 распределены одинаково по биномиальному закону с параметрами $n=10, p=1/2$.
Найдите $D\left[X_1+X_2\right]$. Отв. 5.

6.4. Теоретические вопросы

1. Что такое случайная величина?

2. Что такое дискретная случайная величина?

3. Какой формулой задается закон распределения дискретной случайной величины?

4. Что такое ряд распределения дискретной случайной величины?

5. Что такое таблица распределения дискретной случайной величины?

6. Что такое математическое ожидание дискретной случайной величины?

7. Что такое дисперсия случайной величины?

8. По какой формуле вычисляется дисперсия дискретной случайной величины?

9. Как выражается дисперсия через моменты первых двух порядков?

10. Что такое среднее квадратическое отклонение случайной величины?

11. Что такое мода дискретной случайной величины?

12. Какой формулой задается биномиальный закон распределения?

13. Чему равны математическое ожидание и дисперсия биномиально распределенной случайной величины?

14. Какой формулой задается закон распределения Пуассона?

15. Чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона?

16. Какой формулой задается геометрический закон распределения?

17. Чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по геометрическому закону?

18. Сформулируйте свойства математического ожидания.

19. Сформулируйте свойства дисперсии.

20. Если к случайной величине прибавить 1, как изменится её дисперсия?