

§ 1. Описательная статистика

1.1. Теоретические вопросы с ответами

2. Что такое генеральная совокупность и выборка из нее?
3. Что такое простой случайный выбор?
4. Укажите виды реального выбора.
5. Опишите выбор с возвращением и без возвращения.
6. Какая выборка называется репрезентативной?
7. Какая выборка называется однородной?
8. Что такое вариационный ряд?
9. Что такое статистический ряд?
10. Как графически представить статистический ряд?
11. Что такое выборочная функция распределения?
12. Оценкой чего является выборочная функция распределения $F_n^*(x)$? На чем основывается представление ее как оценки?
13. Сформулируйте теорему о поведении выборочной функции распределения $F_n^*(x)$ при $n \rightarrow \infty$.
14. Что такое порядковая статистика?
15. Что такое группированный статистический ряд?
16. Что такое гистограмма выборки?
17. Для чего строится гистограмма выборки?
18. Как по группированному статистическому ряду вычислить приближенно \bar{x} ?
19. Как по группированному статистическому ряду вычислить приближенно второй выборочный начальный момент a_2 ?
20. Как строится полигон на основе группированного статистического ряда?
21. Как строится кумулята (график эмпирической функции распределения) на основе группированного статистического ряда? Что она оценивает?

Ответы к теоретическим вопросам

1. Генеральной совокупностью называется множество возможных значений изучаемой случайной величины X с приписанным этому множеству законом распределения $X: L(X)$.

2. Простой случайный выбор – это процесс составления выборки, удовлетворяющий четырем условиям: 1) элементы выбираются случайно; 2) каждый элемент генеральной совокупности может быть выбран; 3) каждый элемент выбирается независимо от остальных; 4) все элементы выбираются в равных условиях.
3. Типический выбор: генеральная совокупность разбивается на части и из каждой части выбираются элементы в количестве, пропорциональном объему части. Механический выбор: элементы выбираются по закономерности, например, каждая 10-я деталь с конвейера. Серийный выбор: элементы выбираются сериями. Субъективный выбор: на основе субъективного принципа, например, опрос по телефону.
4. Выбор с возвращением: выбранные элементы запоминаются и возвращаются обратно в генеральную совокупность. При выборе без возвращения выбранные элементы в генеральную совокупность не возвращаются.
5. Репрезентативной, то есть представительной, называется выборка, которая хорошо представляет генеральную совокупность. Для ее образования целесообразен типический выбор.
6. Однородная выборка – это выборка без выбросов из одной генеральной совокупности, а не из нескольких.
7. Вариационный ряд – это последовательность элементов выборки, записанная в неубывающем порядке. Равные элементы повторяются.
8. Статистическим рядом называется возрастающая последовательность различных элементов выборки с указанием частот их повторения.
9. Графически статистический ряд может быть представлен в виде полигона с вершинами в точках $(z_i; n_i)$, где z_i – элементы статистического ряда, а n_i – их частоты.
10. $F_n^*(x) = P^*(X < x)$ – относительная частота события $X < x$ для любого x .
11. $F_n^*(x)$ является оценкой генеральной функции распределения $F_x(x)$, так как стремится к ней по вероятности при $n \rightarrow \infty$.
12. Для любого фиксированного x выборочная функция распределения $F_n^*(x)$ при $n \rightarrow \infty$ стремится по вероятности к генеральной функции распределения: $F_n^*(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} F_x(x)$.

13. k -й порядковой статистикой $x_{(k)}$ называется k -й элемент вариационного ряда.
14. Группированный статистический ряд – это последовательность промежутков $\Delta_i = [a_{i-1}; a_i)$, на которые разбит промежуток $[x_{\min}; x_{\max}]$, и соответствующих им частот n_i попадания элементов выборки в эти промежутки. При этом $\Delta_1 = [x_{\min}; a_1)$, $\Delta_k = [a_{k-1}; x_{\max}]$; k – число промежутков.
15. Гистограмма частот выборки – это ступенчатая фигура, составленная из прямоугольников, основаниями которых являются промежутки Δ_i группированного статистического ряда. Высоты прямоугольников равны n_i – частотам группированного ряда. Вместо частот могут быть взяты относительные частоты n_i/n или приведенные относительные частоты $n_i/(nh)$, где h – длина каждого промежутка Δ_i . Получаем соответственно гистограмму относительных или приведенных относительных частот.
16. По гистограмме приведенных относительных частот выборки можно представить себе график генеральной плотности вероятности, так как он близок к ступенчатой линии, ограничивающей гистограмму сверху.
17. $\bar{x} \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i^*$. Здесь x_i^* – средние точки промежутков Δ_i , а n_i – частоты группированного статистического ряда, n – объем выборки, k – число промежутков Δ_i .
18. $a_2 \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i^*)^2$. Здесь x_i^* – средние точки промежутков Δ_i , а n_i – частоты группированного статистического ряда, n – объем выборки, k – число промежутков Δ_i .
19. Точки плоскости $(x_i^*; n_i)$ соединяются отрезками. Здесь x_i^* – средние точки промежутков Δ_i , а n_i – частоты группированного статистического ряда. Полигон является оценкой кривой генеральной плотности вероятности.
20. Кумулята, построенная на основе группированного статистического ряда является оценкой графика генеральной функции распределения. Это ступенчатая линия со скачками в средних точках x_i^* промежутков Δ_i группированного статистического ряда. Значения функции

суммируются (кумуляруются) от промежутка к промежутку и равны соответственно $0, \frac{n_1}{n}, \frac{n_1 + n_2}{n}, \dots, \frac{n_1 + \dots + n_{k-1}}{n}, 1$.

1.2. Задачи с решениями

1. Дана выборка $(3, -2, 3, 1)$. Составьте вариационный ряд и найдите медиану med . Отв. $-2, 1, 3, 3$. $med = 2$.

Решение. По определению вариационный ряд есть упорядоченная по возрастанию выборка. При четном числе элементов медиана есть среднее арифметическое двух средних элементов. Отсюда $med = (1+3)/2 = 2$.

2. Дана выборка $(4, -3, 0, 3, 2)$. Вычислите среднее абсолютное отклонение d .

Решение. По определению среднее абсолютное отклонение вычисляется по формуле для элементов выборки

$$d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - med).$$

Предварительно составляем вариационный ряд: $-3, 0, 2, 3, 4$ и вычисляем медиану, которая при нечетном числе элементов является средним элементом: $med = 2$. Тогда

$$d = \frac{|-3-2| + |0-2| + |2-2| + |3-2| + |4-2|}{5} = \frac{1}{5}(5 + 2 + 0 + 1 + 2) = 2.$$

3. Дана выборка $(3, 0, 4, -1, 4, 1, 3, 2)$. Найдите интерквартильную широту q .

Решение. Предварительно составляем вариационный ряд:

$(-1, 0, 1, 2, 3, 3, 4, 4)$. Квартили являются элементами вариационного ряда, на четверть удаленные от его концов: $z_{1/4} = 0$; $z_{3/4} = 4$. Тогда $q = 4 - 0 = 4$.

1.3. Задачи для решения с ответами

1. $(-1, 2, 0, -2, 3)$. Найдите \bar{x} .

2. Дана выборка $(-3, 2, 1, -2)$. Вычислите размах.

3. Дана выборка $(-2, 1, 2, 0)$. Вычислите s^2 .

4. Дана выборка $(-3, 2, 1, 0)$. Вычислите второй выборочный начальный момент a_2 .
5. Дана выборка $(-4, 2, 1, 0)$. Вычислите \bar{x} .
6. Дана выборка $(-3, 1, 2, 3, 1, 4, -5)$. Составьте вариационный ряд.
7. Дана выборка $(-5, 1, -4, 0, 3, 1)$. Вычислите медиану med .
8. Дана выборка $(-3, 0, 3, 5, -1, 1, 2, -1)$. Укажите нижнюю квартиль $z_{1/4}$.
9. Дана выборка $(1, -2, 3, 1, 0, 2, 1, -3, -2)$. Вычислите медиану med .
10. Дана выборка $(3, -2, 1, 2, 1)$. Вычислите среднее абсолютное отклонение d .
11. Дана выборка $(1, 2, 1, 2, 2, 3)$. Составьте статистический ряд.
12. Дана выборка $(1, 2, 1, 2, 2, 3)$. Составьте выборочную функцию распределения.
13. Дана выборка $(2, 1, 3, 0, 3, 4, 2, 3)$. Найдите интерквартильную широту q .
14. Дана выборка $(2, 1, 3, 2, 3, 3, 4)$. Вычислите медиану med .
15. Дана выборка $(1, 0, -2, -1, 0, 2, 2, 3, -1, 1)$. Найдите \bar{x} .
16. Дана выборка $(-2, 0, 1, -1, 1, 2, 3, 2)$. Найдите полусумму квартилей t_q .
17. Дана выборка $(-2, 0, 1, -1, 1, 2, 3, 2)$. Найдите полусумму крайних элементов t_R .
18. Дана выборка $(-2, 0, 1, -1, 1, 2, 3, 2)$. Укажите верхнюю квартиль $z_{3/4}$.
19. Дана выборка $(-3, 1, 2, 0, 1, 1, -1, 0)$. Найдите медиану med .
20. Дана выборка $(-2, 1, -1, 0, 2, 0, 0, 1)$. Найдите разность $\bar{x} - med$.

Ответы к задачам

1. $\bar{x} = 0,4$.
2. $R = 5$.
3. $s^2 = 35/16$.
4. $a_2 = 7/2$.
5. $\bar{x} = -1/4$.
6. $-5, -3, 1, 1, 2, 3, 4$.
7. $med = 1/2$.
8. $z_{1/4} = -1$.
9. $med = 1$.
10. $d = 1,6$.
- 11.

| | | | |
|-------|---|---|---|
| z_i | 1 | 2 | 3 |
|-------|---|---|---|

| | | | |
|-------|---|---|---|
| n_i | 2 | 3 | 1 |
|-------|---|---|---|

12. $y = 0$ npu $x \leq 1$; $y = 2/6$ npu $1 < x \leq 2$; $y = 5/6$ npu $2 < x \leq 3$; $y = 1$ npu $x > 3$.

13. $q = 2$.

14. $med = 3$.

15. $\bar{x} = 0,3$.

16. $t_q = 0,5$.

17. $t_R = 5/2$.

18. $z_{3/4} = 2$.

19. $med = 0,5$.

20. $\bar{x} - med = 1/8$.