

## § 4. Формулы полной вероятности и Байеса

### 4.1. Определения и формулы для решения задач

*Формула полной вероятности.*

Пусть событие  $A$  может наступить только с одним из  $n$  попарно несовместных событий  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , составляющих полную группу:

$$H_i H_k = \emptyset \text{ при } i \neq k; H_1 + \dots + H_n = I.$$

Эти события называются *гипотезами*. Тогда

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + \dots + P(H_n)P(A/H_n). \quad (1)$$

Формула (1) носит название *формулы полной*, иначе – *средней вероятности*.

*Формула Байеса*

При выводе формулы Байеса сохраняются предположения, принятые при выводе формулы полной вероятности, и ставится дополнительное условие: при проведении опыта событие  $A$  произошло. Эта новая информация позволяет переоценить первоначальные вероятности гипотез.

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(H_1)P(A/H_1) + \dots + P(H_n)P(A/H_n)}. \quad (2)$$

$(i = 1, 2, \dots, n)$ .

Формула (2) называется *формулой Байеса*, иначе – теоремой гипотез.

### 4.2. Образцы задач с решениями

1. Партия деталей изготовлена тремя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна  $p_1 = 0.01$ , на втором –  $p_2 = 0.15$ , на третьем –  $p_3 = 0.25$ . 1-й завод поставил  $n_1 = 50\%$  продукции, 2-й –  $n_2 = 30\%$ , 3-й –  $n_3 = 20\%$ . Из партии для контроля взята случайная деталь. Найти вероятность того, что она бракованная.

*Решение.* Вычисляем среднюю вероятность брака партии по формуле полной вероятности.

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + \dots + P(H_n)P(A/H_n).$$

Вводим события  $H_k$  – деталь изготовлена на  $k$ -м заводе ( $k=1,2,3$ ). Из условия задачи находим нужные вероятности

$$P(H_1) = 0,5; P(H_2) = 0,3; P(H_3) = 0,2;$$

$$P(A/H_1) = 0,01; P(A/H_2) = 0,015; P(A/H_3) = 0,025.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } P(A) &= 0,5 \cdot 0,01 + 0,3 \cdot 0,015 + 0,2 \cdot 0,025 = \\ &= 0,005 + 0,0045 + 0,005 = 0,0145. \end{aligned}$$

2. Партия деталей изготовлена тремя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна  $p_1 = 0.01$ , на втором –  $p_2 = 0.02$ , на третьем –  $p_3 = 0.03$ . 1-й завод поставил  $n_1 = 40\%$  продукции, 2-й –  $n_2 = 30\%$ , 3-й –  $n_3 = 30\%$ . Из партии для контроля взята случайная деталь, оказавшаяся бракованной. По формуле Байеса найти вероятность того, что она изготовлена на втором заводе.

*Решение.* Используем обозначения, данные и вычисления из первой задачи. Применяя формулу Байеса к этому случаю, получаем

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0,3 \cdot 0,015}{0,0145} = \frac{0,0045}{0,0145} = \frac{45}{145} \approx 0,31.$$

### 4.3. Задачи для решения

1. Партия деталей изготовлена тремя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна  $p_1 = 0.01$ , на втором –  $p_2 = 0.02$ , на третьем –  $p_3 = 0.03$ . 1-й завод поставил  $n_1 = 40\%$  продукции, 2-й –  $n_2 = 30\%$ , 3-й –  $n_3 = 30\%$ . Из партии для контроля взята случайная деталь. Найти вероятность того, что она бракованная.

$$\text{Отв. } 0.4 \cdot 0.01 + 0.3 \cdot 0.02 + 0.3 \cdot 0.03 = 0.019.$$

2. Партия деталей изготовлена тремя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна  $p_1 = 0.01$ , на втором –  $p_2 = 0.01$ , на третьем –  $p_3 = 0.02$ . 1-й завод поставил  $n_1 = 20\%$  продукции, 2-й –  $n_2 = 30\%$ , 3-й –  $n_3 = 50\%$ . Из партии для контроля взята случайная деталь. Найти вероятность того, что она бракованная.

$$\text{Отв. } 0.2 \cdot 0.01 + 0.3 \cdot 0.01 + 0.5 \cdot 0.02 = 0.015.$$

3. Партия деталей изготовлена тремя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна  $p_1 = 0.01$ , на втором –  $p_2 = 0.03$ , на третьем –  $p_3 = 0.04$ . 1-й завод поставил  $n_1 = 50\%$  продукции, 2-й –  $n_2 = 30\%$ , 3-й –  $n_3 = 20\%$ . Из партии для

контроля взята случайная деталь. Найти вероятность того, что она бракованная.

Отв.  $0.5 \cdot 0.01 + 0.3 \cdot 0.03 + 0.2 \cdot 0.04 = 0.022$ .

4. Партия деталей изготовлена тремя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна  $p_1 = 0.02$ , на втором —  $p_2 = 0.03$ , на третьем —  $p_3 = 0.05$ . 1-й завод поставил  $n_1 = 40\%$  продукции, 2-й —  $n_2 = 40\%$ , 3-й —  $n_3 = 20\%$ . Из партии для контроля взята случайная деталь. Найти вероятность того, что она бракованная.

Отв.  $0.4 \cdot 0.02 + 0.4 \cdot 0.03 + 0.2 \cdot 0.05 = 0.03$ .

5. Партия деталей изготовлена тремя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна  $p_1 = 0.01$ , на втором —  $p_2 = 0.03$ , на третьем —  $p_3 = 0.03$ . 1-й завод поставил  $n_1 = 60\%$  продукции, 2-й —  $n_2 = 20\%$ , 3-й —  $n_3 = 20\%$ . Из партии для контроля взята случайная деталь. Найти вероятность того, что она бракованная.

Отв.  $0.6 \cdot 0.01 + 0.2 \cdot 0.03 + 0.2 \cdot 0.03 = 0.018$ .

6. Партия деталей изготовлена тремя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна  $p_1 = 0.02$ , на втором —  $p_2 = 0.02$ , на третьем —  $p_3 = 0.03$ . 1-й завод поставил  $n_1 = 50\%$  продукции, 2-й —  $n_2 = 30\%$ , 3-й —  $n_3 = 20\%$ . Из партии для контроля взята случайная деталь. Найти вероятность того, что она бракованная.

Отв.  $0.5 \cdot 0.02 + 0.3 \cdot 0.02 + 0.2 \cdot 0.03 = 0.022$ .

7. Партия деталей изготовлена тремя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна  $p_1 = 0.01$ , на втором —  $p_2 = 0.04$ , на третьем —  $p_3 = 0.04$ . 1-й завод поставил  $n_1 = 60\%$  продукции, 2-й —  $n_2 = 30\%$ , 3-й —  $n_3 = 10\%$ . Из партии для контроля взята случайная деталь. Найти вероятность того, что она бракованная.

Отв.  $0.6 \cdot 0.01 + 0.3 \cdot 0.04 + 0.1 \cdot 0.04 = 0.022$ .

8. Партия деталей изготовлена тремя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна  $p_1 = 0.01$ , на втором —  $p_2 = 0.03$ , на третьем —  $p_3 = 0.04$ . 1-й завод поставил  $n_1 = 50\%$  продукции, 2-й —  $n_2 = 40\%$ , 3-й —  $n_3 = 10\%$ . Из партии для контроля взята случайная деталь. Найти вероятность того, что она бракованная.

Отв.  $0.5 \cdot 0.01 + 0.4 \cdot 0.03 + 0.1 \cdot 0.04 = 0.025$ .

9. Партия деталей изготовлена тремя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна  $p_1 = 0.02$ , на втором —  $p_2 = 0.02$ , на третьем —  $p_3 = 0.04$ . 1-й завод поставил  $n_1 = 40\%$  продукции, 2-й —  $n_2 = 30\%$ , 3-й —  $n_3 = 30\%$ . Из партии для

контроля взята случайная деталь. Найти вероятность того, что она бракованная.

Отв.  $0.4 \cdot 0.02 + 0.3 \cdot 0.02 + 0.3 \cdot 0.04 = 0.026$ .

10. Партия деталей изготовлена тремя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна  $p_1 = 0.01$ , на втором —  $p_2 = 0.03$ , на третьем —  $p_3 = 0.03$ . 1-й завод поставил  $n_1 = 50\%$  продукции, 2-й —  $n_2 = 30\%$ , 3-й —  $n_3 = 20\%$ . Из партии для контроля взята случайная деталь. Найти вероятность того, что она бракованная.

Отв.  $0.5 \cdot 0.01 + 0.3 \cdot 0.03 + 0.2 \cdot 0.03 = 0.02$ .

11. Партия деталей изготовлена тремя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна  $p_1 = 0.01$ , на втором —  $p_2 = 0.02$ , на третьем —  $p_3 = 0.04$ . 1-й завод поставил  $n_1 = 40\%$  продукции, 2-й —  $n_2 = 40\%$ , 3-й —  $n_3 = 20\%$ . Из партии для контроля взята случайная деталь. Найти вероятность того, что она бракованная.

Отв.  $0.4 \cdot 0.01 + 0.4 \cdot 0.02 + 0.2 \cdot 0.04 = 0.02$ .

12. Партия деталей изготовлена тремя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна  $p_1 = 0.01$ , на втором —  $p_2 = 0.01$ , на третьем —  $p_3 = 0.04$ . 1-й завод поставил  $n_1 = 40\%$  продукции, 2-й —  $n_2 = 40\%$ , 3-й —  $n_3 = 20\%$ . Из партии для контроля взята случайная деталь. Найти вероятность, что она бракованная.

Отв.  $0.4 \cdot 0.01 + 0.4 \cdot 0.01 + 0.2 \cdot 0.04 = 0.016$ .

13. Партия деталей изготовлена тремя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна  $p_1 = 0.01$ , на втором —  $p_2 = 0.02$ , на третьем —  $p_3 = 0.03$ . 1-й завод поставил  $n_1 = 50\%$  продукции, 2-й —  $n_2 = 30\%$ , 3-й —  $n_3 = 20\%$ . Из партии для контроля взята случайная деталь. Найти вероятность того что она бракованная.

Отв.  $0.5 \cdot 0.01 + 0.3 \cdot 0.02 + 0.2 \cdot 0.03 = 0.017$ .

14. Партия деталей изготовлена тремя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна  $p_1 = 0.02$ , на втором —  $p_2 = 0.03$ , на третьем —  $p_3 = 0.04$ . 1-й завод поставил  $n_1 = 40\%$  продукции, 2-й —  $n_2 = 30\%$ , 3-й —  $n_3 = 30\%$ . Из партии для контроля взята случайная деталь. Найти вероятность того, что она бракованная.

Отв.  $0.4 \cdot 0.02 + 0.3 \cdot 0.03 + 0.3 \cdot 0.04 = 0.029$ .

15. Партия деталей изготовлена двумя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна  $p_1 = 0.01$ , на втором —  $p_2 = 0.02$ . 1-й завод поставил  $n_1 = 60\%$  деталей, второй —  $n_2 = 40\%$ . Из партии наудачу взята одна деталь,

оказавшаяся бракованной. По формуле Байеса найдите вероятность того, что она изготовлена первым заводом.

$$\text{Отв. } P(H_1/A) = \frac{0.6 \cdot 0.01}{0.6 \cdot 0.01 + 0.4 \cdot 0.02} = 3/7.$$

16. Партия деталей изготовлена двумя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна  $p_1 = 0.01$ , на втором –  $p_2 = 0.02$ . Первый завод поставил  $n_1 = 60\%$  деталей, 2-й –  $n_2 = 40\%$ . Из партии наудачу взята одна деталь, оказавшаяся бракованной. По формуле Байеса найдите вероятность того, что она изготовлена вторым заводом

$$\text{Отв. } P(H_2/A) = \frac{0.4 \cdot 0.02}{0.6 \cdot 0.01 + 0.4 \cdot 0.02} = 4/7.$$

17. Партия деталей изготовлена двумя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна  $p_1 = 0.01$ , на втором –  $p_2 = 0.03$ . Первый завод поставил  $n_1 = 60\%$  деталей, 2-й –  $n_2 = 40\%$ . Из партии наудачу взята одна деталь, оказавшаяся бракованной. По формуле Байеса найдите вероятность того, что она изготовлена на первом заводе.

$$\text{Отв. } P(H_1/A) = \frac{0.6 \cdot 0.01}{0.6 \cdot 0.01 + 0.4 \cdot 0.03} = 1/3.$$

18. Партия деталей изготовлена двумя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна  $p_1 = 0.01$ , на втором –  $p_2 = 0.03$ . Первый завод поставил  $n_1 = 60\%$  продукции, второй –  $n_2 = 40\%$ . Из партии для контроля взята одна деталь, оказавшаяся бракованной. Найти вероятность того, что она изготовлена на втором заводе.

$$\text{Отв. } P(H_2/A) = \frac{0.4 \cdot 0.03}{0.6 \cdot 0.01 + 0.4 \cdot 0.03} = 2/3.$$

19. Партия деталей изготовлена двумя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна  $p_1 = 0.01$ , на втором –  $p_2 = 0.02$ . Первый завод поставил  $n_1 = 70\%$  деталей, второй –  $n_2 = 30\%$ . Из партии наудачу взята одна деталь, оказавшаяся бракованной. По формуле Байеса найдите вероятность того, что она изготовлена на первом заводе.

$$\text{Отв. } P(H_1/A) = \frac{0.7 \cdot 0.01}{0.7 \cdot 0.01 + 0.3 \cdot 0.02} = 7/13.$$

20. Партия деталей изготовлена двумя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна  $p_1 = 0.01$ , на втором –  $p_2 = 0.02$ . Первый завод поставил  $n_1 = 70\%$  деталей, второй –  $n_2 = 30\%$ . Из партии наудачу взята одна деталь, оказавшаяся бракованной. По формуле Байеса найдите вероятность того, что она изготовлена на втором заводе.

Отв.  $P(H_1/A) = \frac{0.3 \cdot 0.02}{0.7 \cdot 0.01 + 0.3 \cdot 0.02} = 6/13.$

#### 4.4. Теоретические вопросы

1. Запишите формулу полной вероятности.
2. Запишите формулу Байеса.
3. Запишите формулу полной вероятности для случая события  $A$  и двух гипотез  $H_1$  и  $H_2$ .
4. Запишите формулу Байеса для случая события  $A$  и двух гипотез  $H_1$  и  $H_2$ .
5. Почему формула полной вероятности называется также формулой средней вероятности?
6. Чему равняется сумма вероятностей гипотез в формуле полной вероятности?
7. Какими должны быть гипотезы в формуле полной вероятности?
8. Чему равняется сумма переоцененных вероятностей гипотез в формуле Байеса?