

§ 4. Формулы полной вероятности и Байеса

4.1. Определения и формулы для решения задач

Формула полной вероятности.

Пусть событие A может наступить только с одним из n попарно несовместных событий H_1, H_2, \dots, H_n , составляющих полную группу:

$$H_i H_k = \emptyset \text{ при } i \neq k; H_1 + \dots + H_n = I.$$

Эти события называются *гипотезами*. Тогда

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + \dots + P(H_n)P(A/H_n). \quad (1)$$

Формула (1) носит название *формулы полной*, иначе – *средней вероятности*.

Формула Байеса

При выводе формулы Байеса сохраняются предположения, принятые при выводе формулы полной вероятности, и ставится дополнительное условие: при проведении опыта событие A произошло. Эта новая информация позволяет переоценить первоначальные вероятности гипотез.

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(H_1)P(A/H_1) + \dots + P(H_n)P(A/H_n)}. \quad (2)$$

$(i = 1, 2, \dots, n)$.

Формула (2) называется *формулой Байеса*, иначе – теоремой гипотез.

4.2. Образцы задач с решениями

1. Партия деталей изготовлена тремя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна $p_1 = 0.01$, на втором – $p_2 = 0.15$, на третьем – $p_3 = 0.25$. 1-й завод поставил $n_1 = 50\%$ продукции, 2-й – $n_2 = 30\%$, 3-й – $n_3 = 20\%$. Из партии для контроля взята случайная деталь. Найти вероятность того, что она бракованная.

Решение. Вычисляем среднюю вероятность брака партии по формуле полной вероятности.

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + \dots + P(H_n)P(A/H_n).$$

Вводим события H_k – деталь изготовлена на k -м заводе ($k=1,2,3$). Из условия задачи находим нужные вероятности

$$P(H_1) = 0,5; P(H_2) = 0,3; P(H_3) = 0,2;$$

$$P(A/H_1) = 0,01; P(A/H_2) = 0,015; P(A/H_3) = 0,025.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } P(A) &= 0,5 \cdot 0,01 + 0,3 \cdot 0,015 + 0,2 \cdot 0,025 = \\ &= 0,005 + 0,0045 + 0,005 = 0,0145. \end{aligned}$$

2. Партия деталей изготовлена тремя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна $p_1 = 0.01$, на втором – $p_2 = 0.02$, на третьем – $p_3 = 0.03$. 1-й завод поставил $n_1 = 40\%$ продукции, 2-й – $n_2 = 30\%$, 3-й – $n_3 = 30\%$. Из партии для контроля взята случайная деталь, оказавшаяся бракованной. По формуле Байеса найти вероятность того, что она изготовлена на втором заводе.

Решение. Используем обозначения, данные и вычисления из первой задачи. Применяя формулу Байеса к этому случаю, получаем

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0,3 \cdot 0,015}{0,0145} = \frac{0,0045}{0,0145} = \frac{45}{145} \approx 0,31.$$

4.3. Задачи для решения

1. Партия деталей изготовлена тремя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна $p_1 = 0.01$, на втором – $p_2 = 0.02$, на третьем – $p_3 = 0.03$. 1-й завод поставил $n_1 = 40\%$ продукции, 2-й – $n_2 = 30\%$, 3-й – $n_3 = 30\%$. Из партии для контроля взята случайная деталь. Найти вероятность того, что она бракованная.

$$\text{Отв. } 0.4 \cdot 0.01 + 0.3 \cdot 0.02 + 0.3 \cdot 0.03 = 0.019.$$

2. Партия деталей изготовлена тремя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна $p_1 = 0.01$, на втором – $p_2 = 0.01$, на третьем – $p_3 = 0.02$. 1-й завод поставил $n_1 = 20\%$ продукции, 2-й – $n_2 = 30\%$, 3-й – $n_3 = 50\%$. Из партии для контроля взята случайная деталь. Найти вероятность того, что она бракованная.

$$\text{Отв. } 0.2 \cdot 0.01 + 0.3 \cdot 0.01 + 0.5 \cdot 0.02 = 0.015.$$

3. Партия деталей изготовлена тремя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна $p_1 = 0.01$, на втором – $p_2 = 0.03$, на третьем – $p_3 = 0.04$. 1-й завод поставил $n_1 = 50\%$ продукции, 2-й – $n_2 = 30\%$, 3-й – $n_3 = 20\%$. Из партии для

контроля взята случайная деталь. Найти вероятность того, что она бракованная.

Отв. $0.5 \cdot 0.01 + 0.3 \cdot 0.03 + 0.2 \cdot 0.04 = 0.022$.

4. Партия деталей изготовлена тремя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна $p_1 = 0.02$, на втором — $p_2 = 0.03$, на третьем — $p_3 = 0.05$. 1-й завод поставил $n_1 = 40\%$ продукции, 2-й — $n_2 = 40\%$, 3-й — $n_3 = 20\%$. Из партии для контроля взята случайная деталь. Найти вероятность того, что она бракованная.

Отв. $0.4 \cdot 0.02 + 0.4 \cdot 0.03 + 0.2 \cdot 0.05 = 0.03$.

5. Партия деталей изготовлена тремя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна $p_1 = 0.01$, на втором — $p_2 = 0.03$, на третьем — $p_3 = 0.03$. 1-й завод поставил $n_1 = 60\%$ продукции, 2-й — $n_2 = 20\%$, 3-й — $n_3 = 20\%$. Из партии для контроля взята случайная деталь. Найти вероятность того, что она бракованная.

Отв. $0.6 \cdot 0.01 + 0.2 \cdot 0.03 + 0.2 \cdot 0.03 = 0.018$.

6. Партия деталей изготовлена тремя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна $p_1 = 0.02$, на втором — $p_2 = 0.02$, на третьем — $p_3 = 0.03$. 1-й завод поставил $n_1 = 50\%$ продукции, 2-й — $n_2 = 30\%$, 3-й — $n_3 = 20\%$. Из партии для контроля взята случайная деталь. Найти вероятность того, что она бракованная.

Отв. $0.5 \cdot 0.02 + 0.3 \cdot 0.02 + 0.2 \cdot 0.03 = 0.022$.

7. Партия деталей изготовлена тремя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна $p_1 = 0.01$, на втором — $p_2 = 0.04$, на третьем — $p_3 = 0.04$. 1-й завод поставил $n_1 = 60\%$ продукции, 2-й — $n_2 = 30\%$, 3-й — $n_3 = 10\%$. Из партии для контроля взята случайная деталь. Найти вероятность того, что она бракованная.

Отв. $0.6 \cdot 0.01 + 0.3 \cdot 0.04 + 0.1 \cdot 0.04 = 0.022$.

8. Партия деталей изготовлена тремя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна $p_1 = 0.01$, на втором — $p_2 = 0.03$, на третьем — $p_3 = 0.04$. 1-й завод поставил $n_1 = 50\%$ продукции, 2-й — $n_2 = 40\%$, 3-й — $n_3 = 10\%$. Из партии для контроля взята случайная деталь. Найти вероятность того, что она бракованная.

Отв. $0.5 \cdot 0.01 + 0.4 \cdot 0.03 + 0.1 \cdot 0.04 = 0.025$.

9. Партия деталей изготовлена тремя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна $p_1 = 0.02$, на втором — $p_2 = 0.02$, на третьем — $p_3 = 0.04$. 1-й завод поставил $n_1 = 40\%$ продукции, 2-й — $n_2 = 30\%$, 3-й — $n_3 = 30\%$. Из партии для

контроля взята случайная деталь. Найти вероятность того, что она бракованная.

Отв. $0.4 \cdot 0.02 + 0.3 \cdot 0.02 + 0.3 \cdot 0.04 = 0.026$.

10. Партия деталей изготовлена тремя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна $p_1 = 0.01$, на втором – $p_2 = 0.03$, на третьем – $p_3 = 0.03$. 1-й завод поставил $n_1 = 50\%$ продукции, 2-й – $n_2 = 30\%$, 3-й – $n_3 = 20\%$. Из партии для контроля взята случайная деталь. Найти вероятность того, что она бракованная.

Отв. $0.5 \cdot 0.01 + 0.3 \cdot 0.03 + 0.2 \cdot 0.03 = 0.02$.

11. Партия деталей изготовлена тремя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна $p_1 = 0.01$, на втором – $p_2 = 0.02$, на третьем – $p_3 = 0.04$. 1-й завод поставил $n_1 = 40\%$ продукции, 2-й – $n_2 = 40\%$, 3-й – $n_3 = 20\%$. Из партии для контроля взята случайная деталь. Найти вероятность того, что она бракованная.

Отв. $0.4 \cdot 0.01 + 0.4 \cdot 0.02 + 0.2 \cdot 0.04 = 0.02$.

12. Партия деталей изготовлена тремя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна $p_1 = 0.01$, на втором – $p_2 = 0.01$, на третьем – $p_3 = 0.04$. 1-й завод поставил $n_1 = 40\%$ продукции, 2-й – $n_2 = 40\%$, 3-й – $n_3 = 20\%$. Из партии для контроля взята случайная деталь. Найти вероятность, что она бракованная.

Отв. $0.4 \cdot 0.01 + 0.4 \cdot 0.01 + 0.2 \cdot 0.04 = 0.016$.

13. Партия деталей изготовлена тремя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна $p_1 = 0.01$, на втором – $p_2 = 0.02$, на третьем – $p_3 = 0.03$. 1-й завод поставил $n_1 = 50\%$ продукции, 2-й – $n_2 = 30\%$, 3-й – $n_3 = 20\%$. Из партии для контроля взята случайная деталь. Найти вероятность того что она бракованная.

Отв. $0.5 \cdot 0.01 + 0.3 \cdot 0.02 + 0.2 \cdot 0.03 = 0.017$.

14. Партия деталей изготовлена тремя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна $p_1 = 0.02$, на втором – $p_2 = 0.03$, на третьем – $p_3 = 0.04$. 1-й завод поставил $n_1 = 40\%$ продукции, 2-й – $n_2 = 30\%$, 3-й – $n_3 = 30\%$. Из партии для контроля взята случайная деталь. Найти вероятность того, что она бракованная.

Отв. $0.4 \cdot 0.02 + 0.3 \cdot 0.03 + 0.3 \cdot 0.04 = 0.029$.

15. Партия деталей изготовлена двумя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна $p_1 = 0.01$, на втором – $p_2 = 0.02$. 1-й завод поставил $n_1 = 60\%$ деталей, второй – $n_2 = 40\%$. Из партии наудачу взята одна деталь,

оказавшаяся бракованной. По формуле Байеса найдите вероятность того, что она изготовлена первым заводом.

$$\text{Отв. } P(H_1/A) = \frac{0.6 \cdot 0.01}{0.6 \cdot 0.01 + 0.4 \cdot 0.02} = 3/7.$$

16. Партия деталей изготовлена двумя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна $p_1 = 0.01$, на втором – $p_2 = 0.02$. Первый завод поставил $n_1 = 60\%$ деталей, 2-й – $n_2 = 40\%$. Из партии наудачу взята одна деталь, оказавшаяся бракованной. По формуле Байеса найдите вероятность того, что она изготовлена вторым заводом

$$\text{Отв. } P(H_2/A) = \frac{0.4 \cdot 0.02}{0.6 \cdot 0.01 + 0.4 \cdot 0.02} = 4/7.$$

17. Партия деталей изготовлена двумя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна $p_1 = 0.01$, на втором – $p_2 = 0.03$. Первый завод поставил $n_1 = 60\%$ деталей, 2-й – $n_2 = 40\%$. Из партии наудачу взята одна деталь, оказавшаяся бракованной. По формуле Байеса найдите вероятность того, что она изготовлена на первом заводе.

$$\text{Отв. } P(H_1/A) = \frac{0.6 \cdot 0.01}{0.6 \cdot 0.01 + 0.4 \cdot 0.03} = 1/3.$$

18. Партия деталей изготовлена двумя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна $p_1 = 0.01$, на втором – $p_2 = 0.03$. Первый завод поставил $n_1 = 60\%$ продукции, второй – $n_2 = 40\%$. Из партии для контроля взята одна деталь, оказавшаяся бракованной. Найти вероятность того, что она изготовлена на втором заводе.

$$\text{Отв. } P(H_2/A) = \frac{0.4 \cdot 0.03}{0.6 \cdot 0.01 + 0.4 \cdot 0.03} = 2/3.$$

19. Партия деталей изготовлена двумя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна $p_1 = 0.01$, на втором – $p_2 = 0.02$. Первый завод поставил $n_1 = 70\%$ деталей, второй – $n_2 = 30\%$. Из партии наудачу взята одна деталь, оказавшаяся бракованной. По формуле Байеса найдите вероятность того, что она изготовлена на первом заводе.

$$\text{Отв. } P(H_1/A) = \frac{0.7 \cdot 0.01}{0.7 \cdot 0.01 + 0.3 \cdot 0.02} = 7/13.$$

20. Партия деталей изготовлена двумя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна $p_1 = 0.01$, на втором – $p_2 = 0.02$. Первый завод поставил $n_1 = 70\%$ деталей, второй – $n_2 = 30\%$. Из партии наудачу взята одна деталь, оказавшаяся бракованной. По формуле Байеса найдите вероятность того, что она изготовлена на втором заводе.

Отв. $P(H_1/A) = \frac{0.3 \cdot 0.02}{0.7 \cdot 0.01 + 0.3 \cdot 0.02} = 6/13.$

4.4. Теоретические вопросы

1. Запишите формулу полной вероятности.
2. Запишите формулу Байеса.
3. Запишите формулу полной вероятности для случая события A и двух гипотез H_1 и H_2 .
4. Запишите формулу Байеса для случая события A и двух гипотез H_1 и H_2 .
5. Почему формула полной вероятности называется также формулой средней вероятности?
6. Чему равняется сумма вероятностей гипотез в формуле полной вероятности?
7. Какими должны быть гипотезы в формуле полной вероятности?
8. Чему равняется сумма переоцененных вероятностей гипотез в формуле Байеса?