§ 12. Предельные теоремы.

1. Как ведёт себя относительная частота события при $n \to \infty$ (теорема Бернулли)?
2. Запишите предельный закон распределения центрированной и нормированной суммы n одинаково распределённых случайных величин с конечной дисперсией при $n \to \infty$.
3. Запишите неравенство Чебышёва и с его помощью оцените сверху вероятность $\mathrm{P}\left(\left|\mathrm{X}\text{-}\mathrm{m}_{\mathrm{X}}\right| \geq 4\sigma_X\right)$.
4. Сформулируйте центральную предельную теорему (Леви) для случая одинаково распределённых слагаемых.
5. Сформулируйте теорему Чебышёва для одинаково распределённых случайных величин.
6. Какая случайная величина называется центрированной и нормированной?
7. Сформулируйте теорему Бернулли об относительной частоте события.
8. Что такое сходимость по вероятности последовательности случайных величин?
9. Сформулируйте интегральную теорему Муавра-Лапласа.
10. Запишите неравенство Чебышева и с его помощью оцените снизу вероятность $P\left(\left|X - m_X\right| \geq 2\sigma_X\right)$.
11. В неравенстве Чебышева допишите правую часть неравенства $P\left(\left|X - m_X\right| \geq \varepsilon\right) \leq \ldots$
12. В неравенстве Чебышева, записанном в виде $P\left(\left|X - m_X\right| < \varepsilon\right) \geq \ldots$, допишите правую часть неравенства.
13. Пусть $\overline{x} -$ среднее арифметическое результатов измерения $x_1, \ldots, x_n$ случайной величины X. Допишите недостающие элементы в формуле $P\left(\left|\overline{x} - \ldots\right| \geq \varepsilon\right) \ldots \quad (\forall \varepsilon > 0)$, которая записывает теорему Чебышева для этого случая.
14. Пусть $\overline{x} -$ среднее арифметическое результатов измерения $x_1, \ldots, x_n$ случайной величины X. Теорема Чебышева утверждает, что $\overline{x}$ стремится при $n \to \infty$ к определенной величине. Что это за величина и какой вид предела здесь применяется?

15. Пусть $\bar{x}$ – среднее арифметическое результатов измерения $x_1,...,x_n$ случайной величины X. Теорема Чебышева утверждает, что $\bar{x} \xrightarrow[n\to\infty]{P} m$. Объясните, что означает это соотношение.
16. Пусть $\bar{x}$ – среднее арифметическое результатов измерения $x_1,...,x_n$ случайной величины X. Теорема Чебышева утверждает, что $\bar{x} \xrightarrow[n\to\infty]{P} m$. Объясните, что такое m и как называется рассматриваемое свойство $\bar{x}$.
17. Пусть $P^*(A)$ – относительная частота, а $P(A)$ – вероятность события A. Теорема Бернулли утверждает, что $P^*(A) \xrightarrow[n\to\infty]{P} P(A)$. Как называется это свойство $P^*(A)$ как оценки?
18. Пусть $P^*(A)$ – относительная частота, а $P(A)$ – вероятность события A. Теорема Бернулли утверждает, что $P^*(A) \xrightarrow[n\to\infty]{P} P(A)$. Объясните, как понимается это соотношение с помощью определения сходимости по вероятности.
19. Пусть Y_n – центрированная и нормированная сумма одинаково распределенных, взаимно независимых случайных величин. Запишите к чему стремится функция распределения Y_n при $n \to \infty$ на основании центральной предельной теоремы.
20. В формуле $P\left(a \le \dfrac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \le b\right) \underset{n\to\infty}{\to} ...$, выражающей интегральную предельную теорему Муавра- Лапласа, допишите правую часть и объясните смысл величин μ, n, p, q.

Ответы к теоретическим вопросам

1. Стремится по вероятности к вероятности события.
2. Нормальный закон $N(0,1)$ с функцией распределения $\Phi(x)$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.
3. $P(|X - m_X| \ge \varepsilon) \le \dfrac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2}$; $\quad P(|X - m_X| \ge 4\sigma_X) \le \dfrac{\sigma_X^2}{(4\sigma_X)^2} = \dfrac{1}{16}$.

4. Дана последовательность взаимно независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ с конечными дисперсией D и математическим ожиданием m. Тогда функция распределения $F_{Y_n}(x)$ случайной величины $Y_n = \left(\sum_{k=1}^{n} X_k - nm\right) \Big/ \sqrt{nD}$, являющейся центрированной и нормированной суммой n первых случайных величин последовательности стремится при $n \to \infty$ к функции распределения $\Phi(x)$ нормальной случайной величины с параметрами 0 и 1.
5. Пусть случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$ попарно независимы, одинаково распределены, имеют конечные математическое ожидание m и дисперсию D. Тогда имеет место предельное соотношение $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad (\forall \varepsilon > 0).$
6. $\overset{\circ}{X} = (X - m_X)/\sigma_X$.
7. Относительная частота $P^*(A)$ события при n независимых испытаниях по схеме Бернулли стремится по вероятности к вероятности события при $n \to \infty$: $P^*(A) \xrightarrow{P} P(A)$ при $n \to \infty$.
8. Последовательность случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ называется сходящейся по вероятности к величине А (случайной или нет), если для любого $\varepsilon > 0$ имеет место предельное соотношение $P(|X_n - A| \geq 0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$ Запись: $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} A$.
9. Пусть $\mu -$ число появлений события A в n независимых испытаниях по схеме Бернулли, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p и не появляется с вероятностью $q = 1 - p$. Тогда для любых a, b имеет место предельное соотношение $P\left(a \leq \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} < b\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(b) - \Phi(a),$ где $\Phi(x) -$ функция Лапласа.
10. $P(|X - m_X| \geq \varepsilon) \leq \frac{D_X}{\varepsilon^2}$; $P(|X - m_X| \geq 2\sigma_X) \leq \frac{\sigma_X^2}{(2\sigma_X)^2} = \frac{1}{4}.$
11. $P(|X - m_X| \geq \varepsilon) \leq \frac{D_X}{\varepsilon^2}.$

12. $P\left(\left|X-m_X\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\dfrac{D_X}{\varepsilon^2}$.

13. $P\left(\left|\overline{x}-m_X\right|\geq\varepsilon\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \quad (\forall\varepsilon>0)$.

14. $\overline{x}\xrightarrow[n\to\infty]{P}m_X$

15. $P\left(\left|\overline{x}-m\right|\geq\varepsilon\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ для любого $\varepsilon>0$.

16. $m=m_X$ – математическое ожидание X. Рассматриваемое свойство $\overline{x}$ есть свойство состоятельности $\overline{x}$ как оценки m.

17. Рассматриваемое свойство есть свойство состоятельности $P^*(A)$ как оценки $P(A)$.

18. $P\left(\left|P^*(A)-P(A)\right|\geq\varepsilon\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \quad (\forall\varepsilon>0)$.

19. $F_{Y_n}(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}\Phi(x)$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

20. $P\left(a\leq\dfrac{\mu-np}{\sqrt{npq}}<b\right)\underset{n\to\infty}{\to}\Phi(b)-\Phi(a)$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа; μ – число успехов в n испытаниях по схеме Бернулли; p – вероятность успеха; $q=1-p$.