§ 14. Тесты по теории вероятностей

Тест 1

1. Если $A \subset B$, то чему равно AB?
2. Сформулируйте классическое определение вероятности.
3. События A, B, C взаимно независимы. $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}$. Найдите $\mathrm{P}(A+B+C)$.
4. Испытываются независимо 3 прибора. Вероятность выхода из строя первого равна $p_1=0.3$, второго – $p_2=0.4$, третьего – $p_3=0.5$. Найти вероятность того, что хотя бы один из них выйдет из строя.
5. $n=4$ орудия независимо выстрелили по цели. Вероятность попадания в цель для каждого орудия равна $p=0.4$. Найти вероятность, что в цель попадёт точно одно орудие.
6. Партия деталей изготовлена тремя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна $p_1=0.01$, на втором – $p_2=0.02$, на третьем – $p_3=0.03$. 1-й завод поставил $n_1=40\%$ продукции, 2-й – $n_2=30\%$, 3-й – $n_3=30\%$. Из партии для контроля взята случайная деталь. Найти вероятность того , что она бракованная.
7. С помощью функции распределения одномерной случайной величины найдите вероятность $P(a \le X < b)$?
8. Случайная величина X распределена по геометрическому закону с параметром $p=1/2$. Найдите $\mathrm{M}[2X+1]$.
9. Запишите формулу, выражающую дисперсию для дискретного закона распределения $P(X=x_k)=p_k;\ k=1,\ldots,n.$
10. $f(x)=\begin{cases} 5x^4; x\in[0;1] \\ 0; x\notin[0;1] \end{cases}$. Вычислите $P\left(\frac{1}{2}\le X\le 2\right)$.
11. Случайная величина X распределена равномерно на $[0;10]$. Найдите $P(2\le X\le 5)$.
12. Запишите плотность вероятности для нормального закона $N(m,\sigma)$.
13. Запишите плотность вероятности двумерной случайной величины, распределённой равномерно в области D.
14. Если случайные величины X и Y независимы, чему равен их коэффициент корреляции ρ_{XY}?

15. Как вычислить вероятность $P\left(\left(X_1, X_2, X_3\right) \in D\right)$ попадания 3-х мерной непрерывной случайной величины $\left(X_1, X_2, X_3\right)$ в 3-х мерную область *D*?
16. Какая случайная величина называется центрированной и нормированной?

Ответы к тесту 1

1. A.
2. Вероятность события равна отношению числа случаев, благоприятствующих событию, к общему числу случаев.
3. $P(A+B+C)=1-(1/2)^3=7/8$ $P(A+B+C)=1-(1/2)^3=7/8$.
4. $p=1-0.7\cdot 0.6\cdot 0.5=0.79$.
5. $4\cdot 0.4\cdot 0.6^3 \approx 0.35$.
6. $0.4\cdot 0.01+0.3\cdot 0.02+0.3\cdot 0.03=0.019$.
7. $P\left(a \le X < b\right)=F_X\left(b\right)-F_X\left(a\right)$.
8. 5.
9. $DX=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(x_k-m_X\right)^2 p_k$.
10. $31/32$.
11. $3/10$.
12. $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\dfrac{\left(x-m_X\right)^2}{\sigma_X^2}\right]$.
13. $f_{XY}\left(x,y\right)=\dfrac{1}{S_D}$ при $\left(x,y\right)\in D$; $f_{XY}\left(x,y\right)=0$ при $\left(x,y\right)\notin D$; S_D – площадь области D.
14. 0.
15. $P\left(\left(X_1, X_2, X_3\right)\in D\right)=\iiint\limits_D f\left(x_1, x_2 x_3\right)dx_1 dx_2 dx_3$.
16. $\overset{\circ}{X}=\left(X-m_X\right)/\sigma_X$.

Тест 2

1. Чему равна вероятность суммы событий, составляющих полную группу?
2. Дано: $\mathrm{P}(AB)=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\overline{B})=\dfrac{1}{4}$. Найти $\mathrm{P}\left(B/A\right)$.

3. Какие n событий называются взаимно независимыми?

4. Два сообщения посылаются независимо по двум каналам связи. Вероятность, что первое сообщение дойдет до адресата, равна $p_1 = 0.5$, а второе – $p_2 = 0.3$. Найти вероятность, что хотя бы одно сообщение дойдет до адресата.

5. Испытываются 3 прибора на надежность. Вероятность выхода из строя каждого равна 0.3. Найти вероятность, что выйдет из строя не более одного прибора.

6. В цеху два типа станков. Станков 1-го типа – 30%, 2-го типа – 70%. Для станков 1-го типа требуется переналадка в течение времени T с вероятностью 0.5, а для станков 2-го типа – с вероятностью 0.3. Найти вероятность, что в течение времени T произвольный станок цеха потребует переналадки.

7. Запишите геометрический закон распределения и объясните смысл входящих в него величин.

8. Случайная величина X задана рядом распределения:

P$(X = 1) = 1/4$, P$(X = 2) = 1/3$, P$(X = 3) = 5/12$. Вычислите m_X.

9. Что такое начальный момент порядка k ?

10. $f_X(x) = \begin{cases} 4x^3, x \in [0;1] \\ 0, x \notin [0;1] \end{cases}$. Найдите m_X.

11. Напишите плотность вероятности случайной величины, распределённой по показательному закону с $m_X = 2$.

12. Что такое нижняя квартиль непрерывной случайной величины?

13. Как задать закон распределения дискретной двумерной случайной величины?

14. В каком диапазоне изменяется коэффициент корреляции ρ_{XY} ?

Какому случаю соответствуют его крайние значения?

15. Приведите пример реальной *n*- мерной непрерывной случайной величины.

16. Пусть $\overline{x}$ – среднее арифметическое результатов измерения $x_1,...,x_n$ случайной величины X. Допишите недостающие элементы в формуле

$$P\left(\left|\overline{x}-...\right|\geq\varepsilon\right)... \quad (\forall\varepsilon>0),$$

которая записывает теорему Чебышева для этого случая.

Ответы к тесту 2

1. 1.
2. 2/3.
3. Если каждое событие не зависит от произведения любого числа остальных событий и от каждого из них в отдельности.
4. 0,65.
5. 0,784.
6. 0,36.
7. $P\left(X=k\right)=p\left(1-p\right)^{k-1}; k=1,2,...; 0<p<1.\ p=\dfrac{1}{m_x}.$
8. 13/6.
9. $\alpha_k=M\left[X^k\right].$
10. $4/5.$
11. $f\left(x\right)=0 \quad при \quad x<0; \quad f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}e^{-x/2} \quad при \quad x\geq 0.$
12. Корень уравнения $F\left(x\right)=1/4.$
13. С помощью формулы $P\left(X=x_i,Y=y_k\right)=p_{ik}; i=1,2,...; k=1,2,...$
14. $-1\leq\rho_{XY}\leq 1.$ Если $Y=aX+b$, то $\left|\rho_{XY}\right|=1;$ $\rho_{XY}=-1$ при $a>0;$ $\rho_{XY}=1$ при

$a > 0.$

15. Результаты n измерений одной и той же величины.

16. $P\left(\left|\overline{x} - m_X\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad (\forall \varepsilon > 0).$

Тест 3

1. Выразите $\overline{A+B}$ через $\overline{A}$ и $\overline{B}$ по формуле Де Моргана.
2. Какая последовательность испытаний называется схемой Бернулли?
3. Будут ли несовместные события независимыми?
4. В цепь последовательно включены два реле, отключающие ее при перегрузке и работающие независимо. Каждое срабатывает с вероятностью $p = 0.8$. Найти вероятность, что при перегрузке сработает хотя бы одно реле.
5. 4 сообщения посланы независимо по различным каналам связи. Вероятность, что каждое сообщение дойдет до адресата, равна $p = 0.6$. Найти вероятность, что до адресата дойдет не менее трех сообщений.
6. Партия деталей изготовлена тремя заводами. Вероятность брака на первом заводе равна $p_1 = 0.01$, на втором – $p_2 = 0.01$, на третьем – $p_3 = 0.04$. 1-й завод поставил $n_1 = 40\%$ продукции, 2-й – $n_2 = 40\%$, 3-й – $n_3 = 20\%$. Из партии для контроля взята случайная деталь. Найти вероятность, что она бракованная.
7. Запишите биномиальный закон распределения и объясните смысл входящих в него величин.
8. Вычислите D_X для случайной величины, заданной рядом распределения $\mathrm{P}(X = 1) = 1/4$, $\mathrm{P}(X = 2) = 1/3$, $\mathrm{P}(X = 3) = 5/12$.

9. Случайная величина X распределена по биномиальному закону с Параметрами $n=10;\ p=1/4$. Запишите формулу, выражающую закон распределения.

10. Найдите квантиль порядка 1/3 для распределения

$$f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & x\in[0;1];\\ 0, & x\notin[0;1].\end{cases}$$

11. Случайная величина X распределена по показательному закону с $m_X=2$. Запишите функцию распределения $F_X(x)$.

12. Случайная величина X распределена по нормальному закону $N(m,\sigma)$. Запишите выражение для функции распределения $F_X(x)$.

13. Дискретные случайные величины $X,Y-$ независимы и равновероятно принимают только значения 0 и 1. Найдите ряд распределения случайной величины $Z=X+Y$.

14. Что такое коэффициент корреляции случайных величин X,Y? Для какой цели он применяется?

15. Запишите формулу, выражающую дисперсию суммы взаимно независимых случайных величин через дисперсии слагаемых.

16. Пусть $P^*(A)$ – относительная частота, а $P(A)$ – вероятность события A. Теорема Бернулли утверждает, что $P^*(A)\underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}}P(A)$. Как называется это свойство $P^*(A)$ как оценки?

Ответы к тесту 3

1. $\overline{A+B}=\overline{A}\overline{B}$.
2. *Схема Бернулли* проведения независимых испытаний состоит в том, что независимо проводится n испытаний (опытов), в каждом из которых наблюдаемое событие A появляется с вероятностью p $(0<p<1)$ и не появляется с вероятностью $q=1-p$.
3. Несовместные события зависимы, так как если одно происходит, то второе не происходит.
4. 0,96.
5. 0,16416.
6. 0,016.
7. $P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}; k=0,1,...,n; 0<p<1.$
8. 275/144.
9. $P(X=k)=C_{10}^k (1/4)^k (3/4)^{10-k}; k=0,1,...,10.$
10. $1/\sqrt[3]{3}$.
11. $F(x)=0 \quad \textit{при} \quad x<0; \quad F(x)=1-e^{-x/2} \quad \textit{при} \quad x\geq 0.$
12. $F_X(x)=\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$. $\Phi(x)-$функция Лапласа.
13. $P(Z=0)=\frac{1}{4}; P(Z=1)=\frac{1}{2}; P(Z=2)=\frac{1}{4}.$
14. $\rho_{XY}=\frac{K_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$; $K_{XY}-$корреляционный момент; σ_X,σ_Y-средние квадратические отклонения X,Y. Применяется для исследования зависимости между X,Y.
15. $D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} DX_i.$
16. Состоятельность.