§ 3. Теоремы сложения и умножения вероятностей

3.1. Определения и формулы для решения задач

Теоремы умножения вероятностей

Теорема умножения вероятностей для двух событий:

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго при условии, что первое произошло**.**

$$\mathsf{P}(AB)=\mathsf{P}(B)\mathsf{P}\left(A/B\right)=\mathsf{P}(A)\mathsf{P}\left(B/A\right)$$

Теорема умножения вероятностей для n *любых событий:*

$$\mathsf{P}(A_1A_2\ldots A_n)=\mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}\left(A_2/A_1\right)\mathsf{P}\left(A_3/A_1A_2\right)\ldots\mathsf{P}\left(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}\right)$$

Два события называются независимыми, если условная вероятность любого из них равна безусловной, т. е. выполняются равенства

$$\mathsf{P}\left(A/B\right)=\mathsf{P}(A);\quad \mathsf{P}\left(B/A\right)=\mathsf{P}(B).$$

События $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ *называются взаимно независимыми (иначе – независимыми в совокупности), если каждое из них не зависит от произведения любого числа остальных событий и от каждого в отдельности.*

Теорема умножения вероятностей для n *взаимно независимых событий:*

$$\mathsf{P}(A_1A_2\ldots A_n)=\mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2)\ldots\mathsf{P}(A_n).$$

Правила сложения вероятностей.

Аксиома сложения вероятностей(для попарно несовместных событий):

$$\mathsf{P}\left(\sum_k A_k\right)=\sum_k \mathsf{P}(A_k).$$

Теорема сложения вероятностей для двух любых событий:

$$\mathsf{P}(A+B)=\mathsf{P}(A)+\mathsf{P}(B)-\mathsf{P}(AB).$$

Теорема (сложения вероятностей для n *взаимно независимых событий):*

$$\mathsf{P}\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right)=1-\prod_{k=1}^{n}\left[1-\mathsf{P}(A_k)\right].$$

3.2. Образцы задач с решениями

1. Батарея из четырех орудий сделала залп по цели независимо для каждого орудия. Вероятность попадания для каждого орудия равна 0,6. Найти вероятность промаха для всей батареи.

Решение. Вероятность промаха для каждого орудия равна 0,4. По теореме умножения для взаимно независимых событий вероятность промаха для всех орудий вместе равна $p=\left(0,4\right)^4=0,0256.$

2. Два станка в цеху работают независимо. Первый выходит из строя за время T с вероятностью $p_1=0,2$; второй – с вероятностью $p_2=0,3$. Найти вероятность того, что за время T из строя выйдет точно один станок.

Решение. Введем два события: A_1-за время T из строя выйдет первый станок и останется работать второй; A_2-из строя выйдет второй станок и будет работать первый. Т.к. по условию за время T из строя выйдет точно один станок, то события A_1, A_2 несовместны. По теореме умножения для независимых событий $P\left(A_1\right)=0,2\cdot 0,7=0,14;\quad P\left(A_2\right)=0,3\cdot 0,8=0,24$.

По аксиоме сложения вероятностей вероятность искомого события равна

$$P\left(A_1+A_2\right)=P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)=0,14+0,24=0,38.$$

3. Три орудия независимо сделали по одному выстрелу по цели. Вероятность попадания первого равна $p_1=0,2$, второго - $p_2=0,3$, третьего - $p_3=0,4.$ Найти вероятность хотя бы одного попадания.

Решение. По теореме сложения вероятностей для взаимно независимых событий вероятность хотя бы одного попадания равна

$$p=1-\left(1-p_1\right)\left(1-p_2\right)\left(1-p_3\right)=1-0.8\cdot 0.7\cdot 0,6=0,336\,.$$

4. В урне 5 шаров, 3 белых и 2 черных. Случайным образом последовательно вынимаются 3 шара. Найти вероятность того, что все вынутые шары будут белыми. Применяем теорему умножения вероятностей для трех любых событий.

Решение. Введем события $A_k;\left(k=1,2,3\right)$, означающие, что k-й вынутый шар будет белым.

$$P\left(A_1A_2A_3\right)=P\left(A_1\right)P\left(A_2/A_1\right)P\left(A_3/A_1A_2\right)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{10}.$$

Численные значения условных вероятностей находим, пользуясь классическим определением вероятности.

3.3. Задачи для решения

1) Испытываются независимо 3 прибора. Вероятность выхода из строя первого равна $p_1 = 0.3$, второго – $p_2 = 0.4$, третьего – $p_3 = 0.5$. Найти вероятность того, что хотя бы один из них выйдет из строя. Отв. $p = 1 - 0.7 \cdot 0.6 \cdot 0.5 = 0.79$.

2) Испытываются независимо 3 прибора. Вероятность выхода из строя первого равна $p_1 = 0.2$, второго – $p_2 = 0.3$, третьего – $p_3 = 0.3$. Найти вероятность того, что хотя бы один из них выйдет из строя. Отв. $p = 1 - 0.8 \cdot 0.7^2 = 0.608.$

3) Два орудия независимо сделали по одному выстрелу по цели. Вероятность попадания первого равна $p_1 = 0.3$, второго – $p_2 = 0.4$. Найти вероятность точно одного попадания.

Отв. $p = 0.3 \cdot 0.6 + 0.7 \cdot 0.4 = 0{,}46.$

4) Два орудия независимо сделали по одному выстрелу по цели. Вероятность попадания первого равна $p_1 = 0.5$, второго – $p_2 = 0.6$. Найти вероятность точно одного попадания.

Отв. $p = 0.5 \cdot 0.4 + 0.5 \cdot 0.6 = 0.5.$

5) Два элемента включены в цепь параллельно и работают независимо. При испытании цепи каждый элемент может выйти из строя с вероятностью $p = 0.4$. Найти вероятность прохождения тока в цепи в результате испытания.

Отв. $p = 1 - 0.6^2 = 0.64$.

6) Два элемента включены в цепь параллельно и работают независимо. При испытании цепи каждый элемент может выйти из строя с вероятностью $p = 0.6$. Найти вероятность прекращения тока в цепи в результате испытания.

Отв. $p = 1 - 0.4^2 = 0.84$.

7) В цепь последовательно включены два реле, отключающие ее при перегрузке и работающие независимо. Каждое срабатывает с вероятностью $p = 0.9$. Найти вероятность того, что при перегрузке оба реле не сработают и цепь не отключат.

Отв. $p = 0.1^2 = 0.01$.

8) В цепь последовательно включены два реле, отключающие ее при перегрузке и работающие независимо. Каждое срабатывает с вероятностью $p = 0.8$. Найти вероятность того, что при перегрузке оба реле не сработают и цепь не отключат.

Отв. $p = 0.2^2 = 0.04$.

9) В цепь последовательно включены два реле, отключающие ее при перегрузке и работающие независимо. Каждое срабатывает с вероятностью $p = 0.9$. Найти вероятность, что при перегрузке сработает хотя бы одно реле.

Отв. $p = 1 - 0.1^2 = 0.99$.

10) В цепь последовательно включены два реле, отключающие ее при перегрузке и работающие независимо. Каждое срабатывает с вероятностью $p = 0.8$. Найти вероятность того, что при перегрузке сработает хотя бы одно реле.

Отв. $p = 1 - 0.2^2 = 0.96$.

11) В цепь параллельно включены 3 элемента, работающие независимо. Вероятность безотказной работы каждого за время T равна $p = 0.6$. Найти вероятность безотказной работы всей цепи за время T. Отв. $p = 1 - 0.4^3 = 0.936$.

12) В цепь параллельно включены 3 элемента, работающие независимо. Вероятность безотказной работы каждого за время T равна $p = 0.7$. Найти вероятность безотказной работы всей цепи за время T. Отв. $p = 1 - 0.3^3 = 0.973$.

13) Испытываются независимо 2 прибора. Вероятность выхода из строя первого равна $p_1 = 0.3$, второго – $p_2 = 0.4$. Найти вероятность того, что из строя выйдет только

один прибор. Отв. $p = 0.3 \cdot 0.6 + 0.7 \cdot 0.4 = 0.46$.

14) Испытываются независимо 2 прибора. Вероятность выхода из строя первого равна $p_1 = 0.4$, второго – $p_2 = 0.5$. Найти вероятность того, что из строя выйдет только один прибор. Отв. $p = 0.4 \cdot 0.5 + 0.6 \cdot 0.5 = 0.5$.

15) Три орудия независимо сделали по одному выстрелу по цели. Вероятность попадания первого равна $p_1 = 0.4$, второго - $p_2 = 0.5$, третьего - $p_3 = 0.6$. Найти вероятность хотя бы одного попадания. Отв.

$p = 1 - 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.6 = 0.88$.

16) Три орудия независимо сделали по одному выстрелу по цели. Вероятность попадания первого равна $p_1 = 0.3$, второго - $p_2 = 0.4$, третьего - $p_3 = 0.5$. Найти вероятность хотя бы одного попадания. Отв.

$p = 1 - 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.7 = 0.79$.

17) Три орудия независимо сделали по одному выстрелу по цели. Вероятность попадания первого равна $p_1 = 0.3$, второго - $p_2 = 0.4$, третьего - $p_3 = 0.5$. Найти вероятность того, что все три промахнулись. Отв.

$p = 0.7 \cdot 0.6 \cdot 0.5 = 0.21$.

18) Три орудия независимо сделали по одному выстрелу по цели. Вероятность попадания первого равна $p_1 = 0.3$, второго - $p_2 = 0.4$, третьего - $p_3 = 0.5$. Найти вероятность того, что все три орудия попали в цель. Отв. $p = 0.3 \cdot 0.4 \cdot 0.5 = 0.06$.

19) В электрическую цепь последовательно включены 3 элемента. Каждый из них за время T может выйти из строя с вероятностью $p = 0.1$. Найдите вероятность того, что за время T цепь выйдет из строя. Отв. $p = 1 - 0.9^3 = 0.271$.

20) В электрическую цепь последовательно включены 3 элемента. Каждый из них за время T может выйти из строя с вероятностью $p = 0.2$. Найдите вероятность того, что за время T цепь выйдет из строя. Отв. $p = 1 - 0.8^3 = 0.488$.

3.4. Теоретические вопросы

1) Сформулируйте теорему умножения вероятностей для двух любых событий.
2) Сформулируйте теорему умножения вероятностей для n любых событий.
3) Какие два события называются независимыми?
4) Какие n событий называются взаимно независимыми?
5) Что означает взаимная независимость событий А, В и С ?
6) Сформулируйте теорему умножения вероятностей для двух независимых событий.
7) Сформулируйте теорему сложения вероятностей для n взаимно независимых событий.
8) Сформулируйте аксиому сложения вероятностей для n попарно несовместных событий.
9) Сформулируйте теорему сложения вероятностей для двух любых событий.
10) Сформулируйте аксиому сложения вероятностей для двух несовместных событий.
11) Сформулируйте теорему сложения вероятностей для двух независимых событий.
12) Будут ли независимые события несовместными? Приведите обоснование ответа.
13) Являются ли несовместные события независимыми? Приведите обоснование ответа.

14) Будут ли события A_1, A_2, A_3 независимыми или несовместными в задаче 4 пункта 1.2 задач с решениями?