§ 2. Вероятность

2.1. Определения и формулы для решения задач

Классическое определение вероятности

Эксперимент E назовем классическим, если он приводит к множеству событий, удовлетворяющих трем условиям:

1) они попарно несовместны;

2) образуют полную группу;

3) равновозможны.

Эти события называются случаями или шансами и обозначаются ω. Они могут быть элементарными событиями.

Случай ω называется благоприятным (иначе – благоприятствующим) событию A, если ω влечет A: $\omega \subset A$.

Если эксперимент E является классическим, то вероятностью события A называется отношение числа m случаев, благоприятствующих событию A, к общему числу n случаев.

$$\mathrm{P}(A) = \frac{m}{n} \qquad (1)$$

Геометрическое определение вероятности

На отрезке Q случайно выбирается точка X. Этот выбор можно интерпретировать как бросание случайной точки X на отрезок Q. При этом попадание X на Q считается достоверным событием, а попадание на отрезок q – случайным. Далее предполагается, что равновозможно попадание X на q, где бы «малый» отрезок q ни находился внутри основного отрезка Q при условии, что длина q – фиксирована. Пусть событие $A = (X \in q)$. Тогда по определению

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{мера } q}{\text{мера } Q}. \qquad (2)$$

Здесь под мерой отрезка понимается его длина.

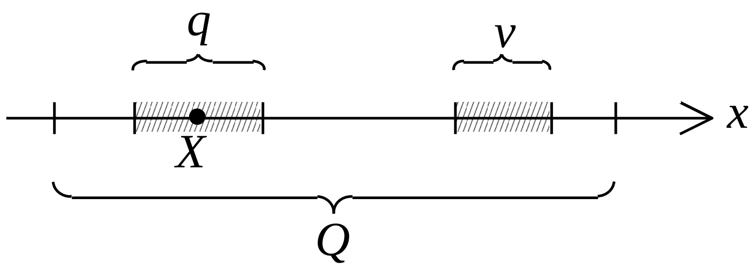

Иллюстрация геометрического определения вероятности

Формула (5.1) распространяется на плоский и пространственный случаи, но тогда под мерой понимается соответственно площадь или объем рассматриваемых областей.

Статистическое определение вероятности

Вероятностью события называется число, около которого колеблется относительная частота этого события, приближаясь к нему при увеличении числа опытов.

Относительной частотой события A называется отношение числа μ опытов, в которых появилось событие A, к общему числу n проведенных опытов.

$$\mathsf{P}^*(A) = \frac{\mu}{n} \qquad (3)$$

Аксиоматическое определение вероятности

Вероятностью называется числовая функция $\mathsf{P}(A)$ события A, определенная на алгебре F, имеющая свойства 1–4:

$$1)\ \mathsf{P}(I) = 1;\ 2)\ \mathsf{P}(\varnothing) = 0;\ 3)\ 0 \le \mathsf{P}(A) \le 1;\ 4)\ \mathsf{P}\left(\sum_k A_k\right) = \sum_k \mathsf{P}(A_k),$$

если события $A_1, A_2, \ldots$ (конечное или счетное множество) попарно несовместны.

Условная вероятность

Пусть A и B – два события, порожденных опытом E, причем $\mathsf{P}(B) \ne 0$. Число $\mathsf{P}(AB)/\mathsf{P}(B)$ называется вероятностью события A при условии, что наступило событие B, или просто условной вероятностью события A и обозначается символом $\mathsf{P}\left(A/B\right)$.

Таким образом, по определению

$$\mathsf{P}\left(A/B\right) = \mathsf{P}(AB)/\mathsf{P}(B).$$

2.2. Образцы задач с решениями

1. Точка случайным образом бросается в квадрат $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$. Используя геометрическое определение вероятности, найдите вероятность попадания случайной точки в часть квадрата, лежащую ниже параболы $y = x^3$. Отв. 1/4.

Решение. Подсчитаем площадь S криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, прямой $x = 1$ и кубической параболой $y = x^3$.

$S=\int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$. Площадь квадрата равна1. По геометрическому определению вероятности искомая вероятность равна отношению S к 1.

Отв. ¼.

2. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков будет равна 3. Отв. 1/18.

Решение. Общее число случаев равно 36, так как каждый из шести случаев выпадения грани на первой кости сочетается с таким же числом случаев выпадения грани на второй кости. Благоприятные случаи усматриваются непосредственно. Они следующие: (1;2) и (2;1). Их 2. Вероятность искомого события равна 2/36=1/18.

3. Из одного комплекта костей домино случайным образом подряд выбираются две кости.

Найти вероятность того, что сумма очков на выбранных костях будет равна 2. Отв.

Решение. Общее число случаев равно $n = 28 \cdot 27$, так как 28 есть число возможных случаев при выборе первой кости, а оставшиеся 27 костей при втором выборе сочетаются с каждым случаем при первом выборе. Число благоприятных случаев усматривается непосредственно. Это: (0;0) и (1;1), (1;1) и (0;0), (0;0) и (0;2), (0;2) и (0;0). То есть $m = 4$. Искомая вероятность равна $\frac{m}{n} = \frac{4}{28 \cdot 27} = \frac{1}{189}$.

2.3. Задачи для решения

1. Чему равна вероятность суммы попарно несовместных событий, составляющих полную группу? Отв. 1.

2. Точка случайным образом бросается в квадрат $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$. Используя геометрическое определение вероятности, найдите вероятность попадания случайной точки в часть квадрата, лежащую ниже параболы $y = x^2$. Отв. 1/3.

3. Чему равна вероятность произведения двух противоположных событий? Отв. 0.

4. Вычислите $P(\overline{A}/A)$, предполагая $P(A) \ne 0$. Отв. 0.

5. Вычислите $P(A/A)$, предполагая $P(A) \ne 0$. Отв. 1.

6. Точка случайным образом бросается в квадрат $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$. Используя геометрическое определение вероятности, найдите вероятность попадания случайной точки в часть квадрата, лежащую выше параболы $y = x^2$. Отв. 2/3.

7. Точка случайным образом бросается в квадрат $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$. Используя геометрическое определение вероятности, найдите вероятность попадания случайной точки в часть квадрата, лежащую выше прямой $y = 2x$. Отв. 1/4.

8. Точка случайным образом бросается в квадрат $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$. Используя геометрическое определение вероятности, найдите вероятность попадания случайной точки в часть квадрата, лежащую ниже прямой $y = 2x$. Отв. 3/4.

9. В урне 3 шара, 2 белых и один черный. Под ряд случайным образом вынимается 2 шара. Найти вероятность того, что они будут разного цвета? Отв. 2/3.

10. В урне 3 шара, 2 белых и один черный. Под ряд случайным образом вынимается 2 шара. Найти вероятность того, что они будут одного цвета? Отв. 1/3.

11. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков будет равна 2. Отв. 1/36.

12. Из одного комплекта костей домино случайным образом подряд выбираются две кости.

Найти вероятность того, что сумма очков на выбранных костях будет равна 3.

Отв. $\dfrac{8}{28\cdot 27}=\dfrac{2}{189}$.

2.4. Теоретические вопросы

1. Сформулируйте классическое определение вероятности.

2. Сформулируйте аксиоматическое определение вероятности.

3. Сформулируйте статистическое определение вероятности.

4 Сформулируйте геометрическое определение вероятности.

5. Что такое относительная частота события?

6. Укажите свойства относительной частоты события.

7. В каких пределах заключена вероятность события? Каким событиям соответствуют крайние значения вероятности?

8. Запишите формулу для вычисления условной вероятности $P(A/B)$.

9. Как связаны вероятности противоположных событий?

10. Чему приближенно равна относительная частота события при большом числе n проведенных опытов?

11. Запишите свойства вероятности.

12. Чему равна вероятность суммы противоположных событий?