

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования
«Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

Неделя науки 2018

Алгоритмы построения фракталов и особенности их реализации

Выполнили студенты группы 23536/4:
Бровцин Игорь Сергеевич
Парамонов Павел Александрович
Соломонов Александр Сергеевич



Цель работы

Рассмотрение наиболее часто используемых способов построения фракталов и реализация их в виде компьютерной программы.

Задачи работы

1. Рассмотреть математическую и теоретическую основу существующих принципов построения фракталов
2. Реализовать некоторые алгоритмы, созданные на основе рассмотренных принципов

Рассмотренные алгоритмы

- Множество Мандельброта
- L-Systems
- IFS
 - Детерминированный алгоритм
 - Алгоритм случайных итераций
- Фрактальное пламя

Множество Мандельброта

$$z_0 = 0$$

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$|z_n| < R$$

Множество Мандельброта

$$c = x + iy$$

$$z_0 = 0$$



$$z_0 = 0$$

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$



$$z_1 = z_0^2 + c = x + iy$$

$$z_2 = z_1^2 + c = (x + iy)^2 + x + iy = x^2 - y^2 + x + (2xy + y)i$$

Множество Мандельброта

$$z_n = x_n + iy_n$$
$$c = p + iq$$

$$z_0 = 0$$
$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + p$$
$$y_{n+1} = 2x_n y_n + q$$

Множество Мандельброта

$$|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

$$z_n = x_n + iy_n$$

Множество Мандельброта



L-Systems

Аристид Линденмайер — венгерский биолог.

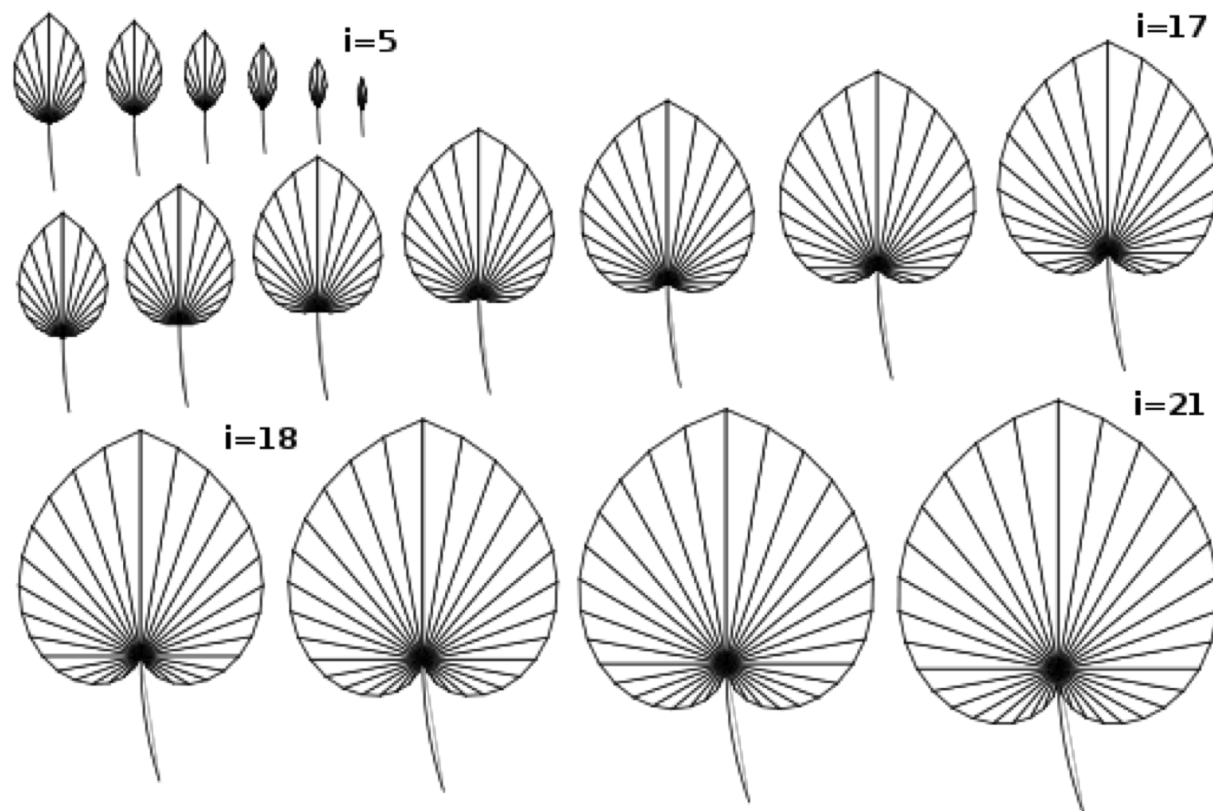
В 1968 году он создал формальный язык, получивший название L-система или система Линденмайера.

Используя эти системы Линденмайер смоделировал поведение клеток растений.



(17 ноября 1925 — 30 октября 1989)

L-Systems



L-Systems



IFS

IFS (Iterated function systems) или системой итерированных функций называется конечный набор функций в полном метрическом пространстве $\mathbb{R}^2$, являющихся сжимающими аффинными преобразованиями.

IFS

Существует **два** алгоритма для вывода результата работы IFS :

- **Детерминированный**
- **Алгоритм случайных итераций**

Детерминированный алгоритм

Преобразование Хатчинсона:

$$F(A) = F_1(A) \cup F_2(A) \cup F_3(A) \cup \dots \cup F_n(A)$$

A_0 — произвольное компактное множество

$$A_1 = F(A_0),$$

$$A_2 = F(A_1),$$

и т. д.

$$A_n = F(A_{n-1}),$$

и т. д.

Детерминированный способ



Алгоритм случайных итераций

Вероятность $p_i > 0$ назначается F_i для $i = 1, 2, \dots, n$, где $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

x_0 — начальное приближение, точка в R^2 ;

$x_1 = F_i(x_0)$, где F_i выбрано случайно;

$x_2 = F_i(x_1)$, где F_i выбрано случайно;

и т. д.

$x_n = F_i(x_{n-1})$, где F_i выбрано случайно;

и т. д.

Алгоритм случайных итераций



Фрактальное пламя

Скотт Дрейвс в 1992 году предложил алгоритм фрактального пламени, который расширил возможности использования системы итерируемых функций.



Фрактальное пламя

Нелинейные преобразования:

1. Синусоидальное: $newX = \sin(x)$, $newY = \sin(y)$;

2. Сферическое: $newX = \frac{x}{x^2+y^2}$, $newY = \frac{y}{x^2+y^2}$;

3. Водоворот:

$$newX = x \cdot \sin(x^2 + y^2) - y \cdot \cos(x^2 + y^2) ,$$

$$newY = x \cdot \cos(x^2 + y^2) + y \cdot \sin(x^2 + y^2) ;$$

4. Диск:

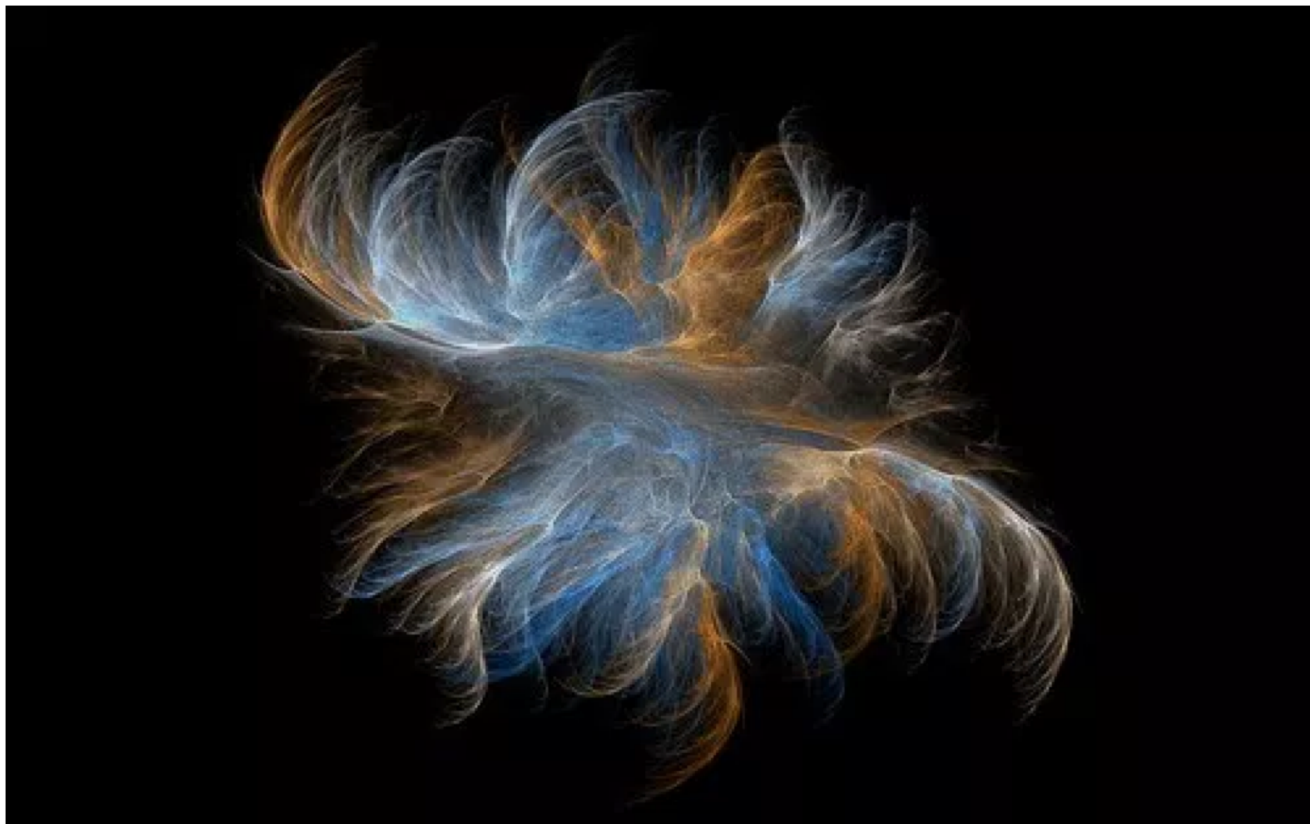
$$newX = \frac{1}{\pi} \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2}) ,$$

$$newY = \frac{1}{\pi} \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \cos(\pi \sqrt{x^2 + y^2}) .$$

Фрактальное пламя



Фрактальное пламя



Заключение

Таким образом результатом проделанной работы является открытый репозиторий с реализацией основных методов построения фракталов, который был реализован на платформе HTML5, которая подразумевает использование JS.

Также в работе были рассмотрены построения фракталов по алгоритмам IFS, L-systems, Fractal Flame, множества Мандельброта с математической точки зрения, а также практическая реализация с возможностью поэтапного отслеживания алгоритмов.

В конечном итоге данная работа может послужить справочным материалом для обзорного освоения алгоритмов построения фракталов.

Список источников

1. <https://github.com/cslarsen/mandelbrot-js> - открытый репозиторий с оптимизированным алгоритмом реализации посл-ти Мандельброта (дата обращения: 20.10.2018)
2. Falconer, Kenneth (1990). Fractal geometry: Mathematical foundations and applications (ISBN 0-471-92287-0).
3. <http://flam3.com/flame.pdf> - статья про алгоритм построения двумерных фракталов, основанный на видоизмененном IFS (дата обращения: 20.10.2018)
4. Michael Barnsley (1988). Fractals Everywhere (ISBN-13 976-0-12-079069-2)
5. Р. М. Кроновер. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М., 2000. — 352 с.

и другие