УДК 511.176, 512.643

А. Босэк (A. Bosek)
XIV LO IM. ST. STASZICA, ПОЛЬША

ОБОБЩЕННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПЕРРИНА И ИХ ВЗАИМОСВЯЗЬ С МАТРИЦАМИ И ДИСКРИМИНАНТОМ

Цель работы – доказательство новой формулы, касающейся обобщённой линейной рекурренции Перрина и матриц.

Актуальность. Матрицы и линейные рекурренции широко используются в прикладной математике, информатике и технике [1]. В настоящее время в мировой литературе просматривается повышенный интерес к вопросам взаимосвязи матриц и рекуррентных последовательностей [2].

Определения. Определяем последовательность Перрина [3] k-того порядка $\mathrm{a^{(k)}}_\mathrm{n}$ следующим образом:

$$a^{(k)}{}_0 = k,\ a^{(k)}{}_1 = \cdots = a^{(k)}{}_{k-2} = 0,\ a^{(k)}{}_{k-1} = k-1 \tag{1}$$

$$a^{(k)}{}_{n+k} = a^{(k)}{}_n + a^{(k)}{}_{n+1} \text{ для всех } n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Теория линейных рекурренции говорит нам, что

$$a^{(k)}{}_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i{}^n \tag{3}$$

где $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ – это корни $f(X) = X^k - X - 1$.

Результаты. Пусть

$$\begin{pmatrix} a^{(k)}_{n-k+1} & a^{(k)}_{n-k+2} & \cdots & a^{(k)}_{n-1} & a^{(k)}_{n} \\ a^{(k)}_{n-k+2} & a^{(k)}_{n-k+3} & & a^{(k)}_{n} & a^{(k)}_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a^{(k)}_{n-1} & a^{(k)}_{n} & & & a^{(k)}_{n+k-2} \\ a^{(k)}_{n} & a^{(k)}_{n+1} & \cdots & a^{(k)}_{n+k-2} & a^{(k)}_{n+k-1} \end{pmatrix} = A_{n,k}$$

Рис. 1. Определение матрицы $\mathbf{A_{n,k}}$

Тогда для всех $k \in N$, $n \in N_{>k-2}$ получаем

$$\det(A_{n,k}) = (-1)^{(n-k+1)(k-1)} \mathrm{disc}(x^k - x - 1) =$$

$$= \begin{cases} (-1)^{\binom{k}{2}}(k^k(-1)^{k-1} + (-1)^{2k-1}(k-1)^{k-1}), & \text{для } k \equiv_2 1, \text{или } n \equiv_2 k-1 \\ (-1)^{\binom{k}{2}+1}(k^k(-1)^{k-1} + (-1)^{2k-1}(k-1)^{k-1}), & \text{для } k \equiv_2 0 \text{ и } n \equiv_2 k \end{cases} \tag{4}$$

Доказательство.

Прежде всего докажем, что для всех $k \in N$, $n \in N_{>k-2}$

$$\det(A_{n+1,k}) = (-1)^{\mathrm{k}-1} \det(A_{n,k}) \tag{5}$$

Очевидно, что матрицы $A_{n,k}$, $A_{n+1,k}$ (Рис. 1) отличаются в двух столбцах: первый столбец $A_{n,k}$ не появляется в $A_{n+1,k}$, а последний столбец $A_{n+1,k}$ не появляется в $A_{n,k}$. Более того, последний столбец $A_{n+1,k}$ – это сумма первого и второго столбца $A_{n,k}$, что следует из определения $a^{(k)}{}_n$, а также на основании того, что $(i+1)$ – ый столбец $A_{n,k}$ – это i-ый столбец $A_{n+1,k}$ для каждого $i \in \{1,2,\cdots,k-1\}$. Прибавляя второй столбец к первому в $A_{n,k}$, получаем $A'_{n+1,k}$, что является матрицей $A_{n+1,k}$ с переставленными столбцами. При этом первый столбец $A'_{n+1,k}$ такой же, как и последний столбец $A_{n+1,k}$.

Таким образом, $A_{n+1,k}$ может образоваться из $A'_{n+1,k}$, если переставить столбцы по следующему алгоритму. Пусть c_i обозначает i-ый столбец $A'_{n+1,k}$. Сначала переставляем

c_1, c_k, потом c_1, c_{k-1}, далее $c_1, c_{k-2}, \cdots$, в конце c_1, c_2. Известным фактом является то, что добавление столбца к столбцу не изменяет детерминанты, но перестановка столбцов меняет знак, так что

$$\det(A_{n+1,k}) = (-1)^{k-1}\det(A'_{n+1,k}) = (-1)^{k-1}\det(A_{n,k}) \tag{7}$$

Отсюда следует, что

$$\det(A_{n+1,k}) = (-1)^{(n-k+2)(k-1)}\det(A_{k-1,k}) \tag{8}$$

Таким образом, достаточно посчитать $\det(A_{k-1,k})$. Для визуализации представляем далее матпицу $\mathrm{A}_{k-1,k}$ (рис. 2):

$$\begin{pmatrix} a_0^{(k)} & a_1^{(k)} & \cdots & a_{k-2}^{(k)} & a_{k-1}^{(k)} \\ a_1^{(k)} & a_2^{(k)} & & a_{k-1}^{(k)} & a_k^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k-2}^{(k)} & a_{k-1}^{(k)} & & & a_{2k-3}^{(k)} \\ a_{k-1}^{(k)} & a_k^{(k)} & \cdots & a_{2k-3}^{(k)} & a_{2k-2}^{(k)} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}_{k-1,k}$$

Рис. 2. Матрица $\mathrm{A}_{k-1,k}$

По определению $a^{(k)}{}_n$ видно, что первые 2k-1 элементов последовательности − это $k, 0,0, \cdots, 0, k-1, k, 0,0, \cdots, k-1$, где в первым блоке k-2 нулей, а во втором блоке k-3. Откуда следует, что

$$\begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 & k-1 \\ 0 & 0 & & k-1 & k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & k-1 & & 0 & 0 \\ k-1 & k & \cdots & 0 & k-1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}_{k-1,k}$$

Рис. 3. Матрица $\mathrm{A}_{k-1,k}$

Используя теорему Лапласа для детерминанта (Рис.3), получаем

$$\det(A_{k-1,k}) = (-1)^{\binom{k}{2}}\left(k^k(-1)^{k-1} + (-1)^{2k-1}(k-1)^{k-1}\right) \tag{9}$$

что равняется дискриминанту многочлена $\mathrm{disc}(x^k - x - 1)$. Это следует из формулы для дискриминанта многочлена $x^n + ax + b$ [4]. Конец доказательства.

В частности для последовательности Перрина 3-его порядка получаем:

$$-23 = \det(A_{n,3}) =$$

$$= a^{(3)}{}_{n-2}a^{(3)}{}_n a^{(3)}{}_{n+2} - a^{(3)}{}_{n-2}{a^{(3)}{}_{n+1}}^2 - a^{(3)}{}_{n+2}{a^{(3)}{}_{n-1}}^2 + 2a^{(3)}{}_{n-1}a^{(3)}{}_n a^{(3)}{}_{n+1} - {a^{(3)}{}_n}^3 \tag{10}$$

Заключение. Полученный результат может быть использован для исследования свойств нулей последовательности $a^{(k)}{}_n \; mod\; p$, где p − это простое число.

ЛИТЕРАТУРА:

1. M.R. Schroeder, Number Theory in Science and Communication: With Applications in Cryptography, Physics, Digital Information, Computing, and Self-Similarity, Springer, 2005
2. Tianxiao He, Jeff H.-C. Liao, Peter J.-S. Shiue, Matrix Representation of Recursive Sequences of Order 3 and Its Applications, Journal of Mathematical Research with Applications, 2018, Vol. 38, No. 3, pp. 221–235
3. Sequence A001608, OEIS, https://oeis.org/A001608
4. Michael Artin, Algebra, 2nd ed. Pearson, 2010