САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО
ВЫСШАЯ ШКОЛА ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ СИСТЕМ И СУПЕРКОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Неделя науки 2019

ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

Выполнила:
Матасова Екатерина (гр. 3530203/80001)

Научный руководитель:
доцент каф. «Высшая математика»
Филимоненкова Надежда Викторовна

Задачи

- Изучить конструкцию и свойства интеграла Лебега

- Сравнить интеграл Лебега и Римана

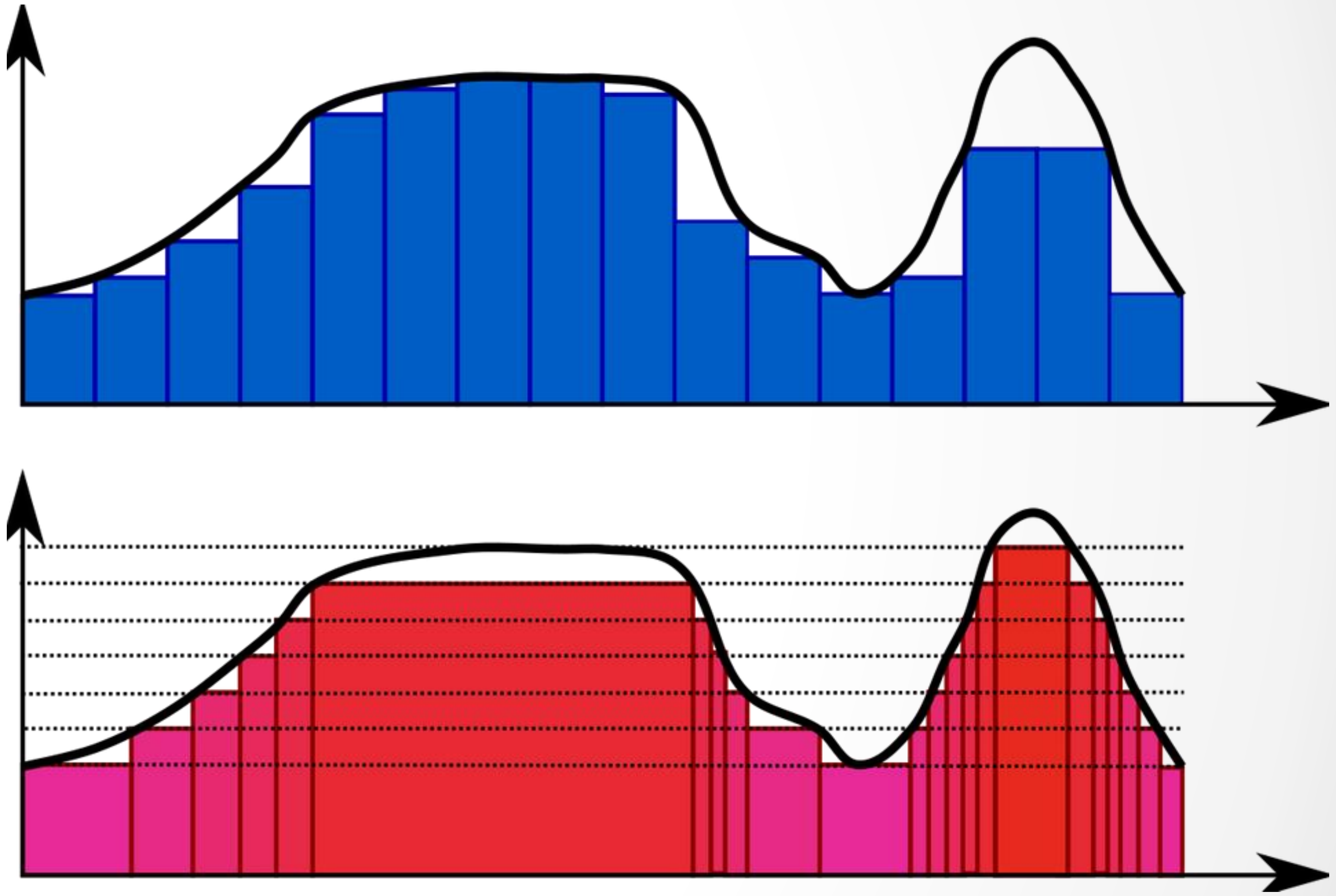
Определение интеграла Лебега

Способ счета денег, соответствующий процессу интегрирования по Риману

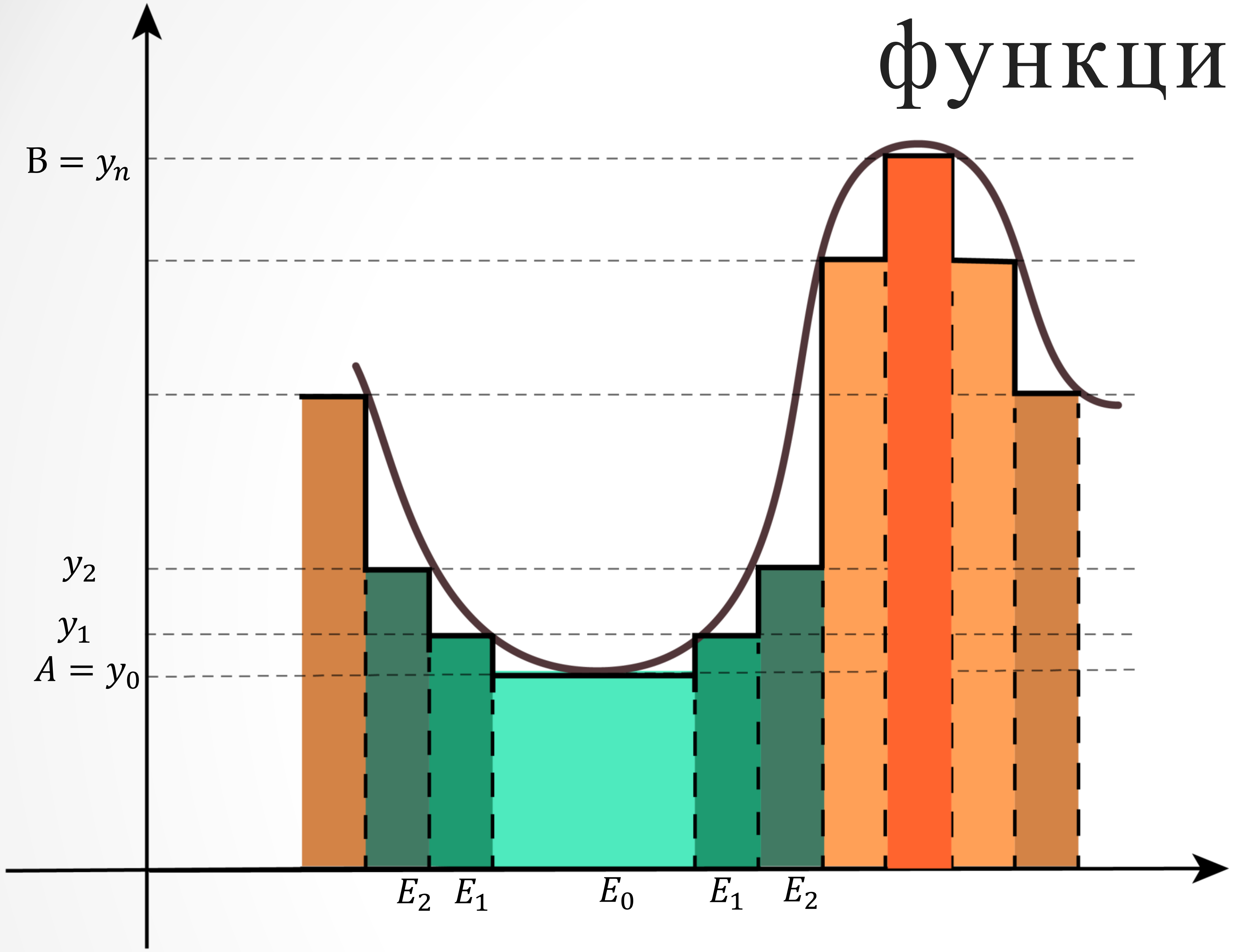
Способ счета денег, соответствующий процессу интегрирования по Лебегу

Определение интеграла Лебега

При определении интеграла по Риману, мы исходили из разбиения на части области интегрирования. В определении Лебега исходным служит разбиение не области изменения аргументов, а промежутка, в котором содержатся значения функции, и уже по этому разбиению строится разбиение на части и области интегрирования. Построение интеграла Лебега опирается на понятие «лебеговой меры».



Определение интеграла Лебега для ограниченных функций



$$\sum_{i=0}^{n} \xi_i(\mu E_i),$$

$$E_i = \{x: y_i \le f(x) < y_{i+1}\}$$

$$\forall \xi_i \in [y_i, y_{i+1}]$$

Интеграл Лебега - предел интегральных сумм Лебега:

$$\int_E f(x)d\mu = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n} \xi_i(\mu E_i) \quad \lambda = \max(y_{i+1} - y_i)$$

Свойства интеграла Лебега

Лебег:

- Счетная аддитивность

$$\int_A f(\mathrm{x})d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(\mathrm{x})d\mu$$

- Изменение $f(x)$ на множестве меры нуль не влияет на величину ее интеграла

- Функция $f(\mathrm{x})$ интегрируема тогда и только тогда, когда интегрируема $|f(\mathrm{x})|$

Риман:

- Конечная аддитивность

$$\int_A f(\mathrm{x})dx = \sum_{n=1}^{m} \int_{A_n} f(\mathrm{x})dx$$

- Изменение $f(x)$ в конечном числе точек не влияет на величину ее интеграла

- Если интегрируема $|f(\mathrm{x})|$, то функция $f(\mathrm{x})$ тоже интегрируема

Сравнение интеграла Лебега и определенного интеграла Римана

Если существует определенный интеграл Римана,

$$\int_a^b f(x)dx$$

то функция $f(x)$ интегрируема на [a,b] по Лебегу и значения интегралов совпадают.

Пример функции не интегрируемой по Риману, но интегрируемой по Лебегу

В качестве примера рассмотрим функцию Дирихле на [0,1]:

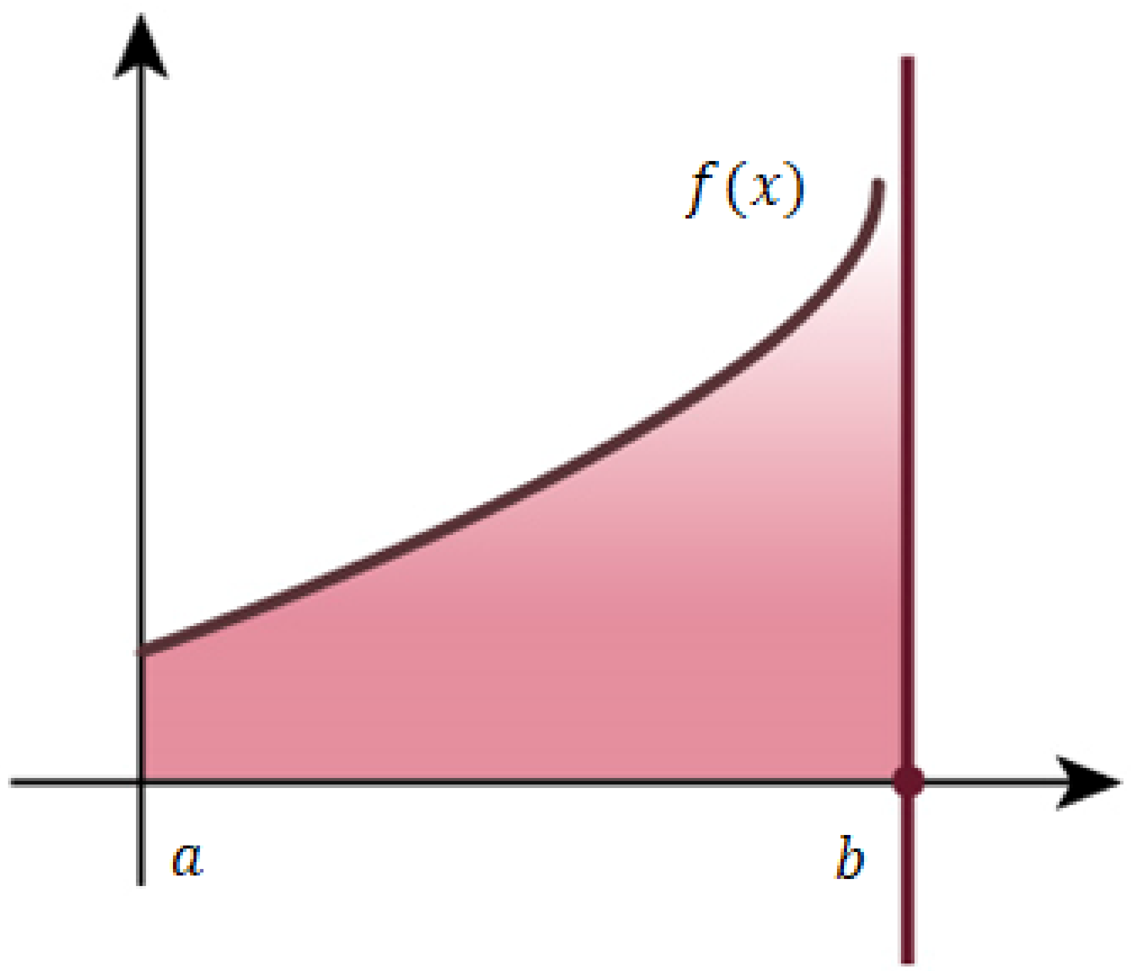
$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{1}, & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Q} \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{x} \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

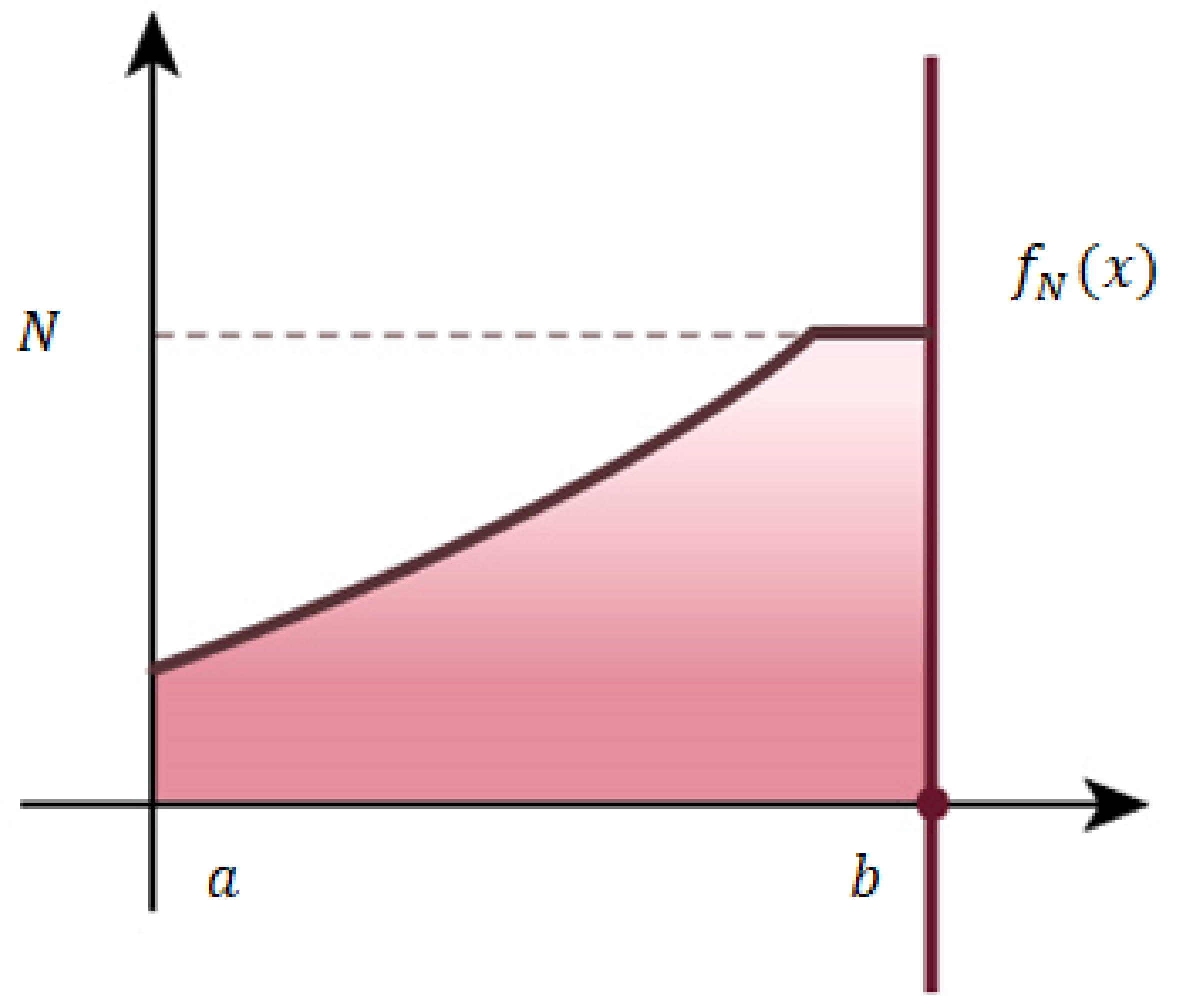
Данная функция не интегрируема в смысле Римана. По Лебегу:

$$\int_0^1 f(x)d\mu = 0$$

Определение интеграла Лебега для неограниченных функций

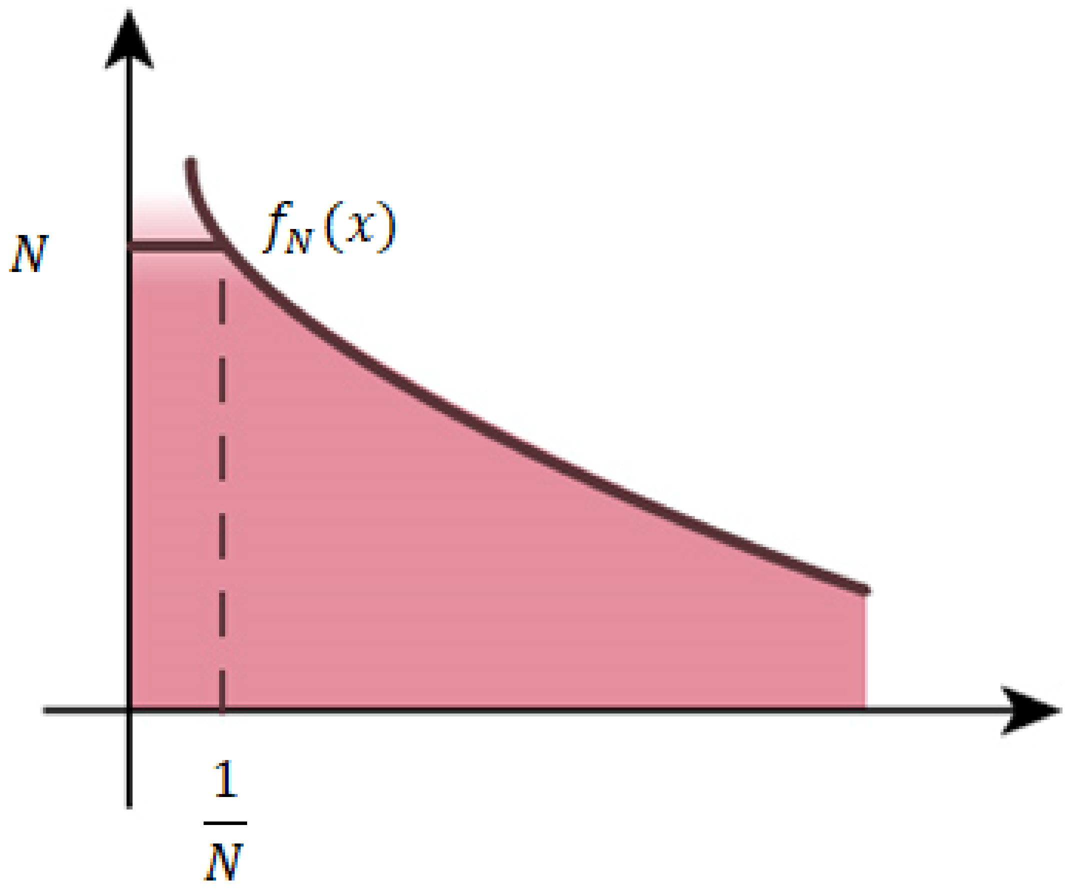
$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & x \le N \\ N, & x > N \end{cases} \qquad \int_{[a,b]} f(x)d\mu = \lim_{N\to\infty} \int_{[a,b]} f_N(\text{x})d\mu$$





Примеры

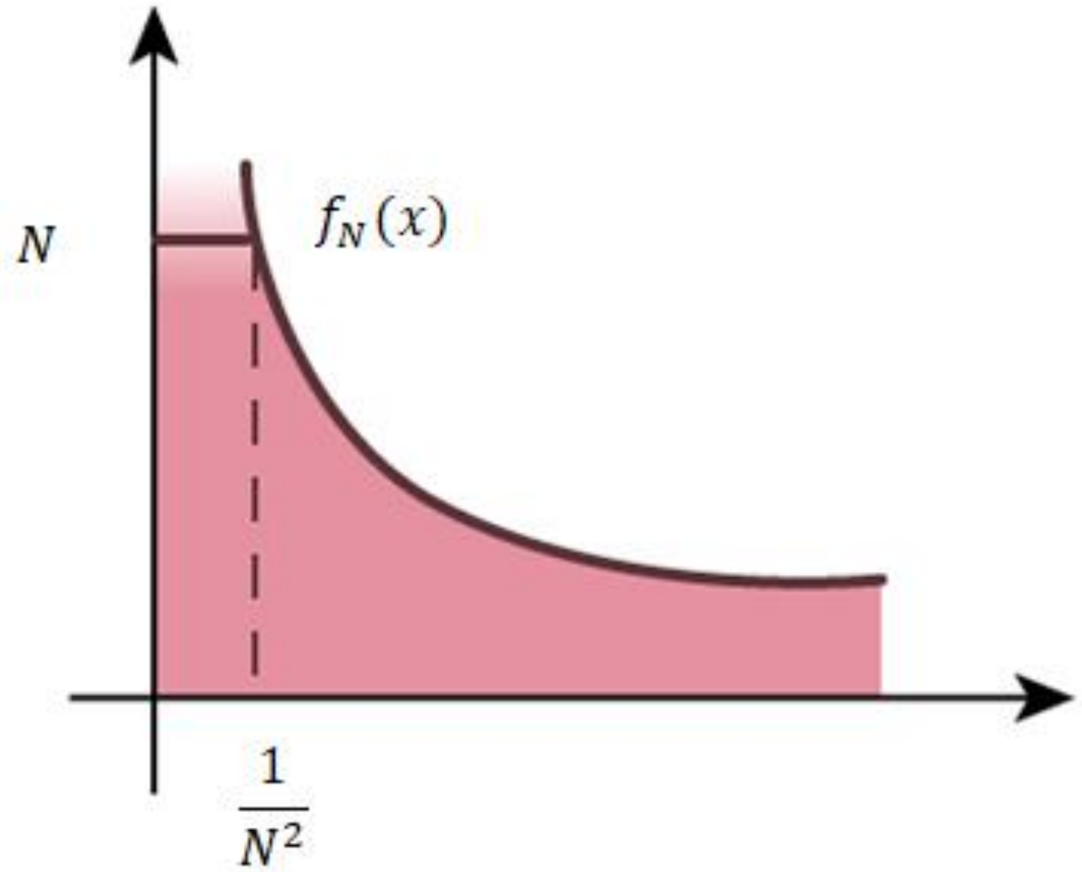
$$f(\mathrm{x}) = \frac{1}{x}$$



$$\int_0^1 f_N(\mathrm{x})d\mu = \int_0^{\frac{1}{N}} \mathrm{N}dx + \int_{\frac{1}{N}}^1 \frac{1}{x}dx = N\frac{1}{N} + \ln(1) - ln\frac{1}{N} = 1 + lnN \to \infty \text{ при } N \to \infty$$

Примеры

$$f(\mathrm{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$



$$\int_0^1 f_N(\mathrm{x})d\mu = \int_0^{\frac{1}{N^2}} \mathrm{N}dx + \int_{\frac{1}{N^2}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \frac{1}{N} + 2 - 2\sqrt{\frac{1}{N^2}} \to 2 \text{ при } N \to \infty$$

Сравнение интеграла Лебега и несобственного интеграла Римана для неограниченных функций

$f(x) \geq 0$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $I_\varepsilon = \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$

Если интеграл Римана I_ε

существует и имеет конечный предел при ε→0, функция интегрируема по Лебегу, причем

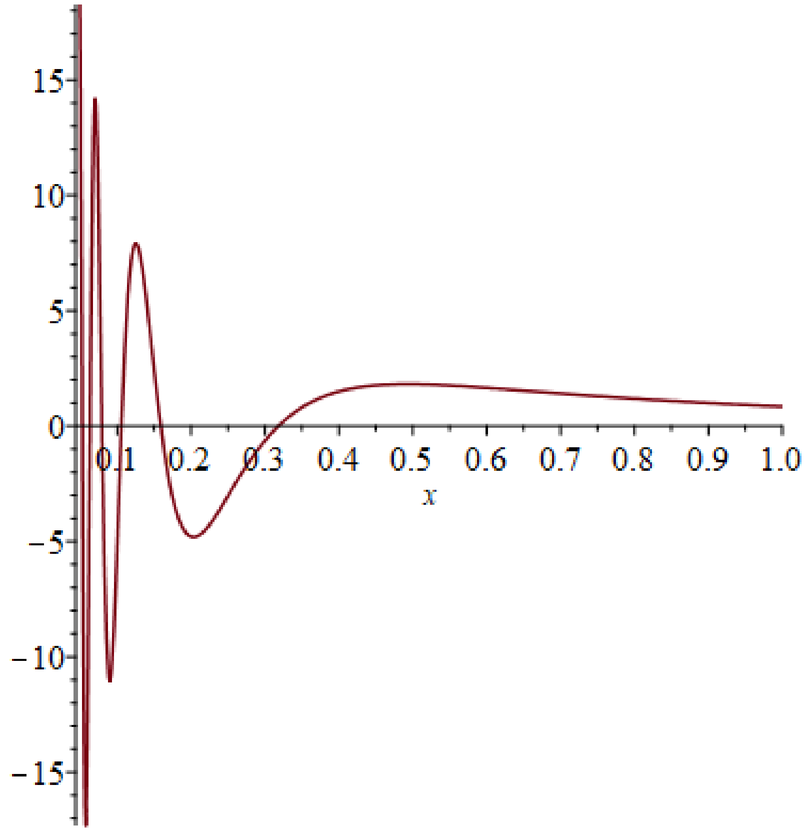
$$\int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu = \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

Если интеграл I_ε существует и имеет бесконечный предел при ε→0, то функция не интегрируема по Лебегу.

Пример функции, интегрируемой по Риману, но не интегрируемой по Лебегу

Например, данный интеграл существует как условно сходящийся несобственный интеграл Римана, но не существует как интеграл Лебега.

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{x} = t \\ dx = -\frac{1}{t^2}dt \end{array}\right] = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt = \lim_{x\to\infty} Six - Si(1) = \frac{\pi}{2} - Si(1)$$



Пространства Лебега

Множества интегрируемых по Лебегу функций образуют линейные пространства.

$$f(x) \in \mathcal{L}^{p}(X) \Leftrightarrow \int_X |f(x)|^p d\mu < \infty$$

Данные пространства не является метрическими, так как не выполнена первая аксиома метрики. Поэтому строятся классы эквивалентности функций, интегрируемых по Лебегу, такие, что две функции принадлежат одному классу, если они отличаются от заданной функции на множестве нулевой меры Лебега на X.

Разбивая $f(x)$ из пространств $\mathcal{L}^p$ (X) на классы эквивалентности, мы получим пространства Лебега $L^p(X)$ при p $\in (0; +\infty)$.

L^p – банаховы пространства. L^2 – гильбертово пространство.

С интегралом Римана пространства не обладали бы полнотой.

Источники

- Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа, изд. 7-е / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М.: Физматлит, 2004. – 572 с.
- Михлин С. Г., Вариационные методы в математической физике, изд. 2-е / С. Г. Михлин. – М:Наука, 1970. – 512 с.
- Конспект лектора, «Интеграл Лебега математический анализ, 2 курс, 3 модуль» А.М. Красносельский, 2015 , 37 страниц [Электронный ресурс] –url: https://www.hse.ru/data/2015/02/24/1090761592/matan3mod-9.pdf
- Электронная статья, «Интегральное исчисление. Интеграл Лебега», [Электронный ресурс] – url: http://mathhelpplanet.com/static.php?p=integral-lebega
- Дьяченко М. И., Ульянов П. Л. Мера и интеграл. — М.: Изд-во «Факториал», 1998, — 160 с.
- Сенченко Ю. В., Интеграл Лебега : «Кафедра математического анализа. Курсовая работа» - Вологда , 2000,[Электронный ресурс]- http://mirznanii.com/a/312535/integral-lebega