УДК 514.11

Ю.А. Выборова
Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого

ГЕКСАГОНАЛЬНАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

Исследование посвящено неклассической тригонометрии. Целью является разработка новой ее разновидности, которую мы называем «гексагональной тригонометрией». Исследование вдохновлено теоретическими положениями классической тригонометрии [1], [2] и имеет некоторые неклассические параллели («Квадратная тригонометрия» [3]).

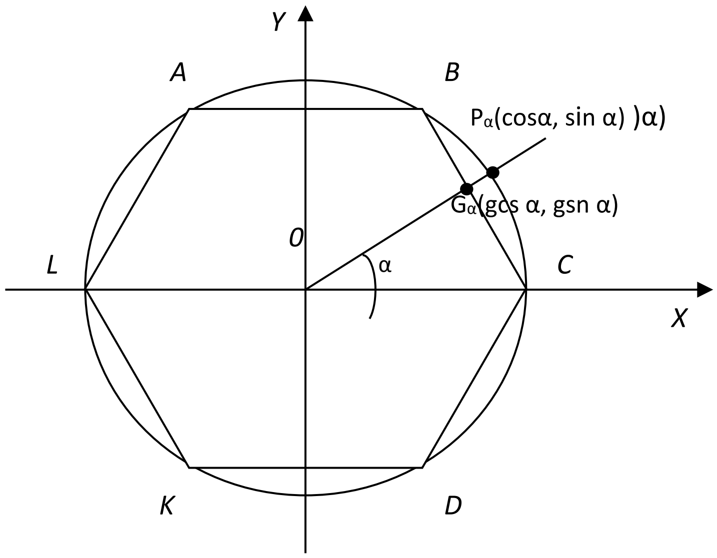

Рис. 1. Единичный гексагон.

Гексагональной мы называем тригонометрию, которая получается, если в определении синуса и косинуса единичную окружность заменить правильным шестиугольником – гексагоном (Рис.1). Гексагональные синус (gsn) и косинус (gcn) – это координаты точки пересечения стороны единичного гексагона и луча OP_{α}. Гексагональные тангенс (gtg) и котангенс (gct) определяются аналогично классическим.

В гексагональной и классической тригонометриях есть схожие свойства. Отличными являются значения для углов не кратных $\{60°n, n\epsilon Z\}$ и $\{180°k, k\epsilon Z\}$. Также, если учитывать значения констант, различны периоды тригонометрических функций. Основное гексагональное тригонометрическое тождество (далее ОГТТ) определяется уравнениями прямых, содержащих стороны гексагона.

Точки B $(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2})$ и C $(1;0)$ лежат на прямой $y=\sqrt{3}-\sqrt{3}x$ [4]. Но график в I четверти координатной плоскости состоит из отрезков двух прямых, таким образом, для графика в I четверти мы получим систему уравнений, и аналогично во II, III и IV четверти:

I. $y=\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}, & x\in\left[0;\frac{1}{2}\right], \\ \sqrt{3}-\sqrt{3}x, & x\in\left[\frac{1}{2};1\right]; \end{cases}$ II. $y=\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}, & x\in\left[-\frac{1}{2};0\right], \\ \sqrt{3}+\sqrt{3}x, & x\in\left[-1;-\frac{1}{2}\right]; \end{cases}$

III. $y = \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2}, & x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right], \\ -\sqrt{3} - \sqrt{3}x, & x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right]; \end{cases}$ IV. $y = \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2}, & x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \\ -\sqrt{3} + \sqrt{3}x, & x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]. \end{cases}$

Заменим x и y на gcn и gsn соответственно и получим свое ОГТТ для каждой четверти координатной плоскости:

I. $\begin{cases} \text{gsn}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, & x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \\ \frac{\text{gsn}\,\alpha}{\sqrt{3}} + \text{gcn}\,\alpha = 1; \end{cases}$ II. $\begin{cases} \text{gsn}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, & x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right], \\ \frac{\text{gsn}\,\alpha}{\sqrt{3}} - \text{gcn}\,\alpha = 1; \end{cases}$

III. $\begin{cases} \text{gsn}\,\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, & x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right], \\ -\frac{\text{gsn}\,\alpha}{\sqrt{3}} - \text{gcn}\,\alpha = 1; \end{cases}$ IV. $\begin{cases} \text{gsn}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, & x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \\ -\frac{\text{gsn}\alpha}{\sqrt{3}} + \text{gcn}\alpha = 1. \end{cases}$

Общий вид основного тождества гексагональной тригонометрии таков:

$$\begin{cases} |\text{gsn}\,\alpha| = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \left|\frac{gsn\,\alpha}{\sqrt{3}}\right| + |gcn\,\alpha| = 1. \end{cases}$$

Выведем основные значения гексагональных функций для углов I четверти координатной плоскости:

$$x = gcn\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{tg\alpha + \sqrt{3}}, \qquad y = gsn\alpha = \frac{\sqrt{3}tg\alpha}{tg\alpha + \sqrt{3}}.$$

Вычислим значения гексагональных косинуса и синуса угла 30°:

$$gcn\,30° = \frac{\sqrt{3}}{tg\,30° + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4}, \quad gsn\,30° = \frac{\sqrt{3}tg30°}{tg30° + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Полученные значения гексагональных функций основных углов I четверти представлены в таблице 1.

	30°	45°	60°
gsn α	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
gcn α	$\frac{3}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$
gtg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
gcg α	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Таблица 1. Значения гексагональных тригонометрических функций

Введем в рассмотрение понятие гексагональной меры угла и константу μ («мю»), выражающую отношение суммы длин всех сторон гексагона к его большой диагонали. Поскольку все стороны нашего гексагона равны и равны 1, то μ=3; примем ее за единицу длины числовой оси. При этом точки 1, $\frac{\mu}{2}$, -1, $-\frac{\mu}{2}$ числовой прямой сопоставляются точкам гексагона $M_1\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $M_2\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $M_3\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $M_4\left(0; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Рассмотрим функцию $y = gcn\,x$. Основные ее свойства совпадают со свойствами классического косинуса. Отдельно можно отметить:

1. Функция $y = gcn\,x$ периодическая с периодом 2μ, четная, $y \in [-1, 1]$.
2. Функция $y = gcn\,x$ принимает значения $y = 0$ при $x = \frac{\mu}{2} + \mu k,\ k\epsilon Z$; $y = 1$ при $x = 2\mu k,\ k\epsilon Z,$ и $y = -1$ при $x = \mu + 2\mu k,\ k\epsilon Z.$
3. Функция $y = gcn\,x$ возрастает при $x\epsilon[-\mu + 2\mu k; 2\mu k]$, kϵZ, убывает при $x\epsilon[2\mu k;\ \mu + 2\mu k]$, kϵZ.

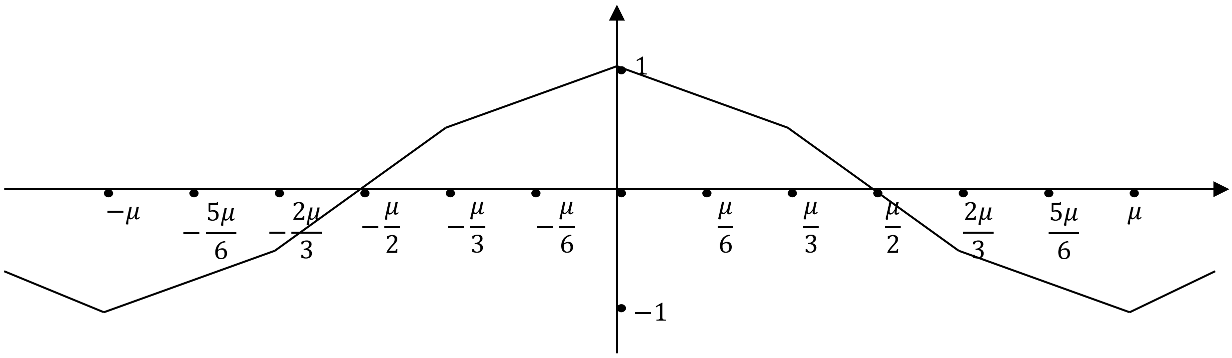

Рис. 2. График гексагонального косинуса.

Рассмотрим функцию $y = gsn\,x$. Основные ее свойства также аналогичны свойствам классического синуса. Отдельно отметим:

1. Функция $y = gsn\,x$ периодическая с периодом 2μ, нечетная, $y \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.
2. Функция $y = gsn\,x$ принимает значения: $y = 0$ при $x = \mu k,\ k\epsilon Z$; $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ на отрезках $[\frac{\mu}{3} + 2\mu k;\ \frac{2\mu}{3} + 2\mu k]$, kϵZ, и $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ на отрезках $\left[-\frac{2\mu}{3} + 2\mu k; -\frac{\mu}{3} + 2\mu k\right],\ k\epsilon Z.$
3. Функция $y = gsn\,x$ возрастает при $x\epsilon[-\frac{\mu}{3} + 2\mu k; \frac{\mu}{3} 2\mu k]$, kϵZ, и убывает при $x\epsilon[\frac{2\mu}{3} + 2\mu k;\ \frac{4\mu}{3} + 2\mu k]$, kϵZ.

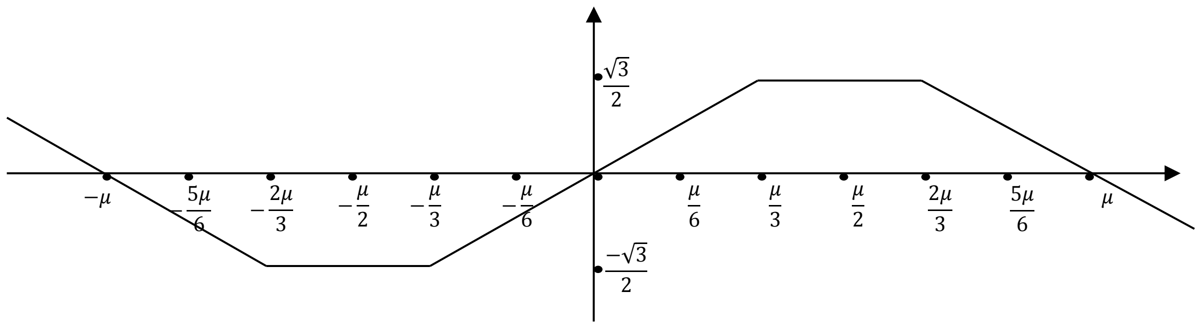

Рис. 3. График гексагонального синуса.

Так как $gtgx \equiv tgx$ и $gctx \equiv ctgx,$ графики этих функций попарно идентичны.

Особенностью гексагональной тригонометрии являются формулы приведения для углов, кратных 60°. При повороте угла $\frac{\mu}{3}$ на углы 60° и 240° модули гексагональных синуса и косинуса будут одинаковы:

$$gsn\left(\frac{\mu}{3}+60°\right)=gsn\frac{\mu}{3}, \qquad gcn\left(\frac{\mu}{3}+60°\right)=-gcn\frac{\mu}{3},$$

$$gsn\left(\frac{\mu}{3}+240°\right)=-gsn\frac{\mu}{3}, \qquad gcn\left(\frac{\mu}{3}+240°\right)=gcn\frac{\mu}{3}.$$

Таким образом, работа устанавливает положения нового направления неклассической тригонометрии – гексагональной тригонометрии. В ней введены определения и обозначения для гексагональных тригонометрических функций, выяснены их свойства, построены их графики. Выведено основное гексагональное тригонометрическое тождество. Введена гексагональная мера угла, аналогичная радианной. Полученные результаты являются новыми и ранее не публиковались. Перспективным продолжением работы может стать разработка методов решения уравнений неклассической тригонометрии.

Гексагональная тригонометрия может найти применение в кристаллографии, исследовании свойств гексагональных сеток, разработке компьютерной графики и элементов архитектурной среды, в исследовании конвективных ячеек Рэлея-Бернара, имеющих шестиугольную форму.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алгебра и начала анализа. 10-11 классы : учеб. для общеобразоват. организаций : базовый уровень // [Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёв и др.]. – 19-е изд. – М. : Просвещение, 2013. – 474 с. : ил. –ISBN 978-5-09-030365-1.
2. Геометрия 7- 9 : учеб. для общеобразоват. учреждений //[Л.С. Атасян, В.Ф. Бутузов, С. Б. Кадонцев и др.] – 16-е издание – М. : Просвещение, 2006. – 384 с.
3. Любимова В.В. Учебный исследовательский проект «Квадратная тригонометрия» (Часть 2) // Математика в школе. 2013. № 9. С. 62-67
4. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. //М.: Книга по требованию, 2012. – 267 с. ISBN 978-5-458-25977-4.