УДК 51-72

М.Р. Бортковская, П.И. Васильев, Д.А. Семенова, Д.А. Тархов, П.П. Удалов, И.А. Шишкина
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

ИЗУЧЕНИЕ ПРОГИБА МЕМБРАНЫ С ПОМОЩЬЮ МНОГОСЛОЙНЫХ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ (РАССМОТРЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ)

Рассмотрено решение задачи о моделировании прогиба нагруженной круговой мембраны в симметрическом случае. Сравниваются модели, выражающие зависимость прогиба мембраны от расстояния до центра. Первая основана на аналитическом решении уравнений условий равновесия. Вторая получена с помощью оригинальной модификации уточнённого метода Эйлера. Коэффициенты моделей подбирались по экспериментально полученных данным. Сравнение показало, что модель, основанная на уточнённом методе Эйлера [1], более достоверно выражает зависимость прогиба мембраны от расстояния до центра.

Рассматривается круглая мембрана радиуса R, на ней располагаются поочередно грузы различной массы, мембрана предполагается невесомой (масса мембраны много меньше массы груза), груз размещается в центре мембраны, его радиус далее обозначен как а , предполагается, что растяжение изотропно (натяжение одинаково по всем направлением).

В данной статье сравниваются точное решение дифференциального уравнения, с одной стороны, и приближенное решение, полученное двухшаговым методом Эйлера, с другой стороны, в плане их соответствия экспериментальным данным.

Пусть $u(r)-$ отклонение мембраны от положения равновесия. Для его описания используем уравнение:

$$u''_{rr}+\frac{1}{r}u'_r=\begin{cases}-B, \textit{если } r\in[0,a],\\ 0, \textit{если } r\in(a,R],\end{cases} \qquad (1)$$

которое представляет собой уравнение Лапласа в полярных координатах, где $u(r,\varphi)=u(r)$, то есть искомая функция не зависит от направления, а зависит только от расстояния r точки от центра мембраны [2]. Здесь $B=\dfrac{A}{T}$, A -- вес груза, T - абсолютная величина приложенной к краю мембраны растягивающей силы. Поскольку мембрана предполагается невесомой, ее вес в правой части уравнения (1) отсутствует.

Рассматриваемое уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. Для дальнейшего сравнения с приближенным решением выпишем его точное решение:

$$u(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}Ba^2\ln\dfrac{a}{R}+u_0-\dfrac{1}{4}B(r^2-a^2)\ \textit{при } r\in[0,a],\\ \dfrac{1}{2}Ba^2\ln\dfrac{r}{R}+u_0\ \textit{при } r\in(a,R].\end{cases} \qquad (2)$$

Здесь $u_0=u(R)$, вообще говоря, это значение нулевое, но поскольку из технических соображений измерения значений прогиба произведены от некоторого начального значения, его и берем в качестве u_0.Решение (2) получено с учетом непрерывности $u(r)$ при $r=a$ и ограниченности решения при $r=0$. Выбор параметра B здесь производится с помощью метода наименьших квадратов так, чтобы минимизировать величину $\sum_{i=1}^{10}(u(r_i)-u_i)^2$. Здесь r_i

- значения r, для которых проводились измерения прогиба, u_i - результаты соответствующих измерений, $u(r_i)$ -- значения функции $u(r)$, найденные по формуле (2). Очевидно, найдя значение B, мы будем знать и соответствующее значение $z_0 = u'(R)$. С учетом приведенных выше формул, зная из эксперимента вес груза, и определяя значение B, мы определяем величину растягивающей силы T.

Приведем уравнение (1) к нормальной системе дифференциальных уравнений [3]:

$$\begin{cases} u' = z, \\ z' = -\dfrac{z}{r} + f(r). \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $f(r)$ - правая часть уравнения (1). После замены переменной $x = R - r$, решая систему (3) двухшаговым методом Эйлера, получим

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0 - xz_0 - \frac{x^2 z_0}{4R}, \\ z(x) &= (z_0 + \frac{xz_0}{2R}) \cdot \frac{2R}{2R - x}. \end{aligned} \tag{4}$$

Значение u_0, как и раньше, берется из эксперимента. Значение z_0 пока не определено. Решение (2) рассматривается при $x \in [0, R-a)$, то есть при $r \in (a, R]$.

Теперь для $r \in [0, a]$ решим систему (3) тем же методом, считая значение прогиба $\tilde{u}_0$ при $r = 0$ неизвестным, а значение производной u'_r при $r = 0$ нулевым. Тогда получим

$$\begin{aligned} u(r) &= \tilde{u}_0 - \frac{r^2 B}{4}, \\ z(r) &= -\frac{rB}{2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Требуя непрерывности решения u и его производной z в точке $r = a$, получим следующие условия:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0 - \frac{a^2 B}{4} &= u_0 - (R-a)z_0 - \frac{(R-a)^2 z_0}{4R}, \\ -\frac{1}{2} aB &= z_0 \frac{2R}{R+a}. \end{aligned} \tag{6}$$

Из условий непрерывности (6) найдем выражения параметров $\tilde{u}_0$ и B через значение z_0, а последнее определим с помощью метода наименьших квадратов так, чтобы минимизировать величину $\sum_{i=1}^{10} (u(r_i) - u_i)^2$, где $u(r_i)$ вычисляются по формуле (5) для $r_i \le a$ и по формуле (4) для $r_i \ge a,\ x_i = R - r_i$.

Теперь в приближенном решении u, выраженном формулами (4) и (5), будут найдены все параметры, и мы можем сравнить его с точным решением так же, как при рассмотрении однородного дифференциального уравнения мембраны.

Результаты опытов

Значение z_0 для точного решения = 0.082, для приближенного = 0.127, значение B для точного решения = 72.599, для приближенного = 41.996, значение T для точного решения= 0.0014, для приближенного = 0.0024. Масса груза = 456 гр, радиус груза=1,5 см, радиус мембраны=10 см. С использованием вышеупомянутых значений были получены приближенное и точное решения рис.1

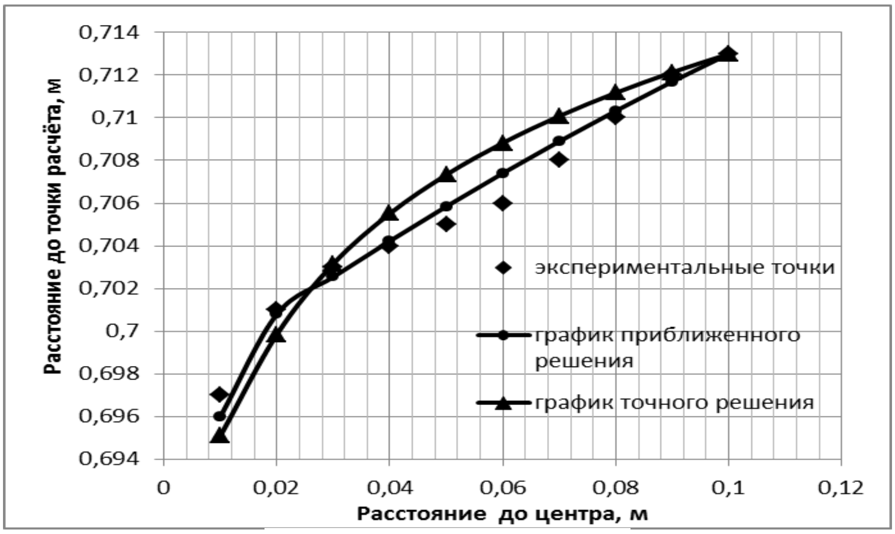

Рисунок 1. Графики решений

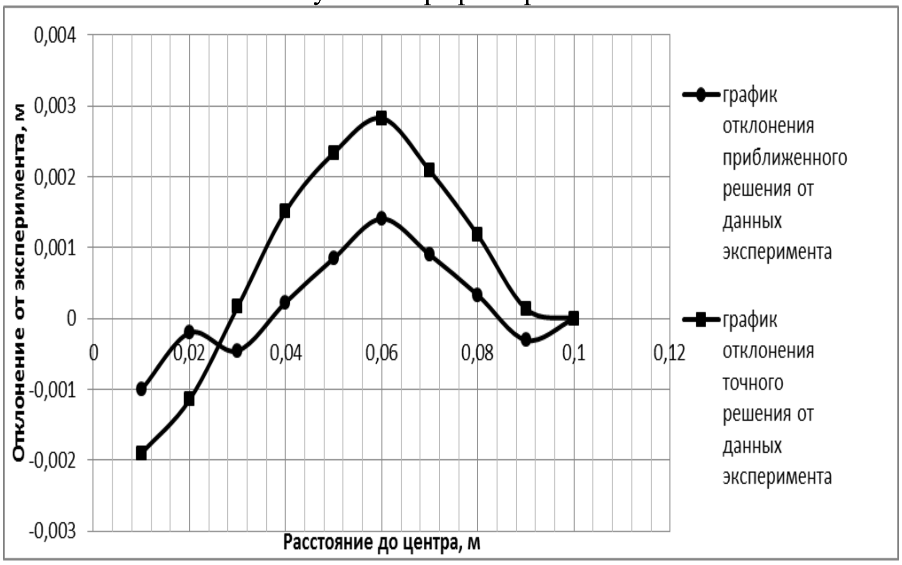

Рисунок 2. Графики отклонения решений от экспериментальных значений для опыта.

Заключение

В результате на рис.2 видим, что точное решение сильнее отклоняется от эксперимента. Это говорит о том, что модель требует уточнения. Для анализа зависимости силы натяжения T от массы мембраны требуется исследование большего количества экспериментов. Для значения производной прогиба z_0 метод наименьших квадратов дает одинаковые значения для однородного и неоднородного дифференциального уравнения (и для приближенного, и для точного решения, при использовании данных трех различных экспериментов).

ЛИТЕРАТУРА

1. Вербжицкий В.М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения // М.: Высшая школа. — 2001. — С. 218-220.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики // М.: Наука. — 1977. — С. 430-437.
3. Араманович И. Г., Левин В. И. Уравнения математической физики // М.: Наука. — 1960. — С. 130-143.