УДК 004.04

Виноходов Т.В., Капицин Д.Р., Каверзнева Т.Т., Тархов Д.А., Терёшин В.А.
Санкт-Петербургский Политехнический Университет имени Петра Великого

# ПРИМЕНЕНИЕ НОВЫХ МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ К ЗАДАЧЕ НЕЛИНЕЙНОГО ИЗГИБА КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ

Моделирование технических объектов часто затруднено недостаточной изученностью происходящих в них процессов. Задача идентификации математической модели по результатам наблюдений обычно гораздо сложнее прямой задачи решения дифференциального уравнения с граничными условиями. Для ускорения её решения был разработан новый класс многослойных моделей [1-4]. Суть подхода заключается в применении известных рекуррентных формул численного интегрирования дифференциальных уравнений к интервалу с переменным верхним пределом. В данной работе указанный подход применяется к задаче моделирования формы изгиба прямого консольно закрепленного металлического стержня. Разработанные методы можно применить для долгосрочного прогнозирования поведения строительных балок, разнообразных конструктивных элементов грузоподъемных машин и механизмов с учетом реальной картины процессов износа, старения и коррозии металла.

Измерения выполнялись с прямым стержнем из алюминиевого сплава длиной 940 мм круглого сечения с диаметром 8 мм, массой 126 гр. Один конец стержня был зажат в тисках, а к другому прикреплялись поочередно грузы весом 100, 200 и т.д. до 1900 гр. Стержень фотографировался после прикрепления и снятия каждого груза.

В качестве математической модели использовано уравнение большого статического прогиба тонкого однородного физически линейного упругого стержня под действием распределенной и сосредоточенной сил [5].

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} = a\left(\mu_i + z\right)\cos\theta \tag{1}$$

где $a = \dfrac{mgL^2}{D}$, $\mu_i = \dfrac{m_i}{m}$, D и L – постоянная изгибная жесткость и длина стержня; θ – угол наклона касательной; $z = 1 - s/L$ - s – натуральная координата изогнутой оси стержня, отсчитываемая от заделки, $m$ - масса стержня, $m_i$ - масса груза.

Нам известно граничное условие на свободном конце стержня: $\left.\dfrac{d\theta}{dz}\right|_{z=0} = 0$, условие в заделке неизвестно, так как при изменении массы груза стержень проворачивался в ней. Угол θ связан с координатами точек на стержне равенствами

$$\frac{dx}{ds} = Cos(\theta); \frac{dy}{ds} = Sin(\theta); \tag{2}$$

От $\theta(z,\theta_0,a)$ переходим к исходным декартовым координатам, интегрируя (2) по формуле Симпсона для интервала переменной длины. Для построения адекватной модели мы переходим от системы (1,2) к её приближённому параметрическому решению $x(s,\theta_0,a)$ и $y(s,\theta_0,a)$. Параметры $\theta_0, a$ находятся по методу наименьших квадратов минимизацией выражения

$$\sum_{j=1}^{N} (x(s_i,\theta_0,a) - x_i)^2 + (y(s_i,\theta_0,a) - y_i)^2 . \tag{3}$$

Здесь $N$ - число точек, в которых проводились измерения, $\{x_i, y_i\}$ - измеренные координаты точек на стержне, находящиеся на расстоянии $s_i$ от заделки. При этом $s_i$ заранее неизвестны.

Для определения функций $x(s_i,\theta_0,a)$, $y(s_i,\theta_0,a)$ мы применили подход [1-4]. Его суть применительно к уравнению (1) состоит в том, чтобы известные формулы численного решения дифференциальных уравнений применить не к промежутку $[0,1]$ а к промежутку с переменным верхним пределом $[0,z]$. При этом вместо таблицы чисел мы получаем функцию $\theta(z,\theta_0,a)$, причём параметры задачи $\theta_0, a$ входят в число её аргументов.

В результате применения упомянутой выше модификации [1-4] неявного метода Эйлера [6] с одним шагом получаем приближённое равенство $\theta(z) \cong \theta_0 + z^2 a(\mu_i + z)\cos(\theta(z))$, из которого находим приближённое решение

$$\theta(z) \cong 2\frac{\theta_0 + z^2 a(\mu_i + z)}{\sqrt{1 + 2z^2 a(\mu_i + z)(\theta_0 + z^2 a(\mu_i + z))} + 1} \qquad (4)$$

где $\theta_0 = \theta(0)$ - угол наклона стержня на его конце. Подстановка (4) в формулы Симпсона позволяет получить зависимости $x(s,\theta_0,a)$ и $y(s,\theta_0,a)$.

Приведём результаты вычислений для двух значений массы груза $m_1 = 0$ и $m_2 = 1500$ грамм.

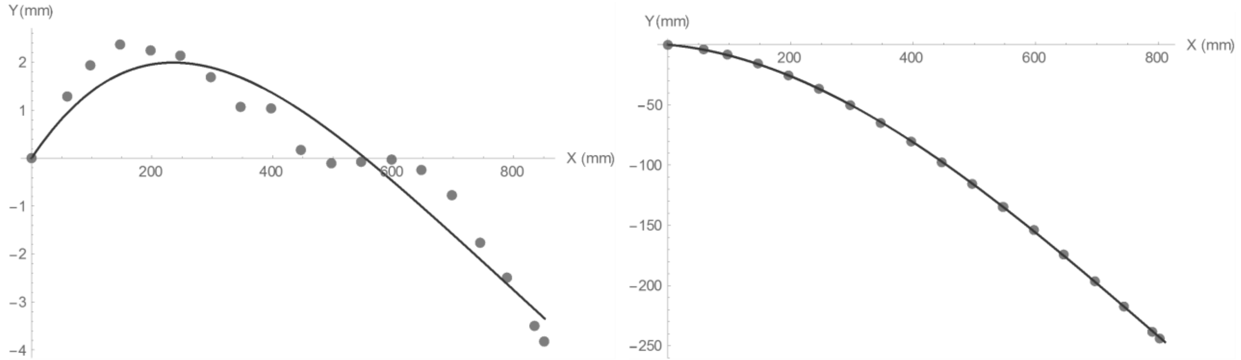


Рис.1 Теоретические и экспериментальные кривые прогиба стержня, полученные с использованием формулы 4 для массы груза $m_1 = 0$ слева и $m_2 = 1500$ грамм справа.

Принципиальным отличием нашего метода от традиционных численных методов является получение функции вместо таблицы чисел, при этом параметры задачи естественным образом входят в число аргументов данной функции. Достаточно типичной для практики является ситуация, когда результаты наблюдений за реальным объектом противоречат математической модели, полученной на основе попытки применения известных физических законов. Эти трудности часто приводят к тому, что модель объекта строится эмпирически с помощью интерполяции по экспериментальным данным. Наш метод позволяет применить промежуточный подход, который состоит в получении приближённых полуэмпирических формул на основе неточной дифференциальной модели и результатов измерений. Известные теоремы о погрешности численных методов [6] позволяют утверждать, что мы можем получить сколь угодно точное приближение к решению дифференциального уравнения, используя разбиение на достаточно большое число интервалов. Наш подход позволяет без использования интерполяции получить формулы, которые можно уточнять по экспериментальным данным.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. Lazovskaya, D. Tarkhov Multilayer neural network models based on grid methods, IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 158 (2016) http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/158/1/01206
2. Alexander Vasilyev, Dmitry Tarkhov, Ivan Bolgov, Tatyana Kaverzneva, Svetlana Kolesova, Tatyana Lazovskaya, Evgeniy Lukinskiy, Alexey Petrov, Vladimir Filkin MULTILAYER NEURAL NETWORK MODELs BASED ON EXPERIMENTAL DATA FOR PROCESSES OF SAMPLE DEFORMATION AND DESTRUCTION// Selected Papers of the First International Scientific Conference Convergent Cognitive Information Technologies (Convergent 2016) Moscow, Russia, November 25-26, 2016 p.6-14 http://ceur-ws.org/Vol-1763/paper01.pdf.
3. Alexander Vasilyev, Dmitry Tarkhov, Tatyana Shemyakina APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTIONS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS// Selected Papers of the XI International Scientific-Practical Conference Modern Information Technologies and IT-Education (SITITO 2016) Moscow, Russia, November 25-26, 2016 p.393-400 http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper50.pdf
4. Dmitry Tarkhov, Ekaterina Shershneva APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTIONS OF MATHIEU'S EQUATIONS BASED ON CLASSICAL NUMERICAL METHODS// Selected Papers of the XI International Scientific-Practical Conference Modern Information Technologies and IT-Education (SITITO 2016) Moscow, Russia, November 25-26, 2016 p.356-362 http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper46.pdf
5. Yu.P.Artyukhin. Arbitary Bending of a cantilever Beam by a Conservative Force//Sc.Notes of Kazan Univ.Physic-Math sc. 2013. B.2 p.144-157
6. E. Hairer, S. P. Nor sett, G. Wanner Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problem, Springer-Verlag, Berlin, 1987. xiv + 480 pp